CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

STEFAN BANACH

Traductores y colaboradores de la edición española

GUILLERMO GARCIA TALAVERA

Profesor de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, México

ING. ALVAR NOÉ BARRA ZENIL

Profesor de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, México

ING. CRISOFORO JOB GONZALEZ

Profesor de la Escuela de Ingeniería Municipal, México

PROF. LUDWIK MARGULES

SEGUNDA EDICIÓN EN ESPAÑOL



UNION TIPOGRAFICA EDITORIAL HISPANO AMERICANA

Barcelona, Bogota, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, La Habana, Lima, Montevideo, Quito, Rio de Janeiro, San José de Costa Rica, San Salvador, Santiago.

MEXICO

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Esta obra es la traducción al español, debidamente autorizada, de la publicada originalmente en idioma ruso, cotejada con la edición original en polaco, por Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, de Varsovia, Polonia, con el título

RACHUNEK ROZNICZKOWY I CALKOWY

IMPRESO EN MEXICO
PRINTED IN MEXICO

Central de Editoriales, S. A., Vicente Beristáin, nº 70, México 8, D. F.

PREFACIO DEL AUTOR A LA EDICION EN LENGUA POLACA

Ofrecemos este libro a los estudiantes que se inician en el Cálculo Diferencial e Integral. Su estudio permitirá al lector abordar textos más extensos sobre el particular.

Trataremos de presentar los teoremas más importantes y, si es posible, su demostración. Sin embargo, serán omitidas algunas demostraciones, pues, a nuestro entender, complicarían el aprendizaje a los recién iniciados.

El lector debe tratar de resolver el mayor número de problemas propuestos. Debido a la falta de espacio, hemos limitado el número de estos problemas.

Debo expresar mi profunda gratitud al señor J. Auerbach por la ayuda que me prestó en la preparación de este libro.

STEFAN BANACH

INTRODUCCION

Anticipemos algunas definiciones y teoremas de utilidad subsecuente.

1. Intervalo (a, b) o $[a, b]$ es el conjunto de números x que satisfacen una de las parejas de desigualdades

$$a<x<b, \quad a\leqslant x<b, \quad a<x\leqslant b, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

El intervalo es cerrado si se cumplen las desigualdades $a\leqslant x\leqslant b$.
Conocida la interpretación de los números reales sobre un eje numérico, llamaremos segmento al intervalo y puntos a los números.

2. Recordaremos al lector la fórmula conocida bajo el nombre de Binomio de **Newton**:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{r}{n-2}a^2b^{n-2}+$$
$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

donde $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$. El símbolo $\binom{n}{k}$ definido en la última fórmula es válido para los valores fraccionarios, y negativos también, de n.

Por ejemplo,

$$\binom{8}{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70,$$
$$\binom{-10}{5}=\frac{(-10)\cdot(-11)\cdot(-12)\cdot(-13)\cdot(-14)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=-2002,$$
$$\binom{-1/2}{k}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=$$
$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}=(-1)^k\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k},$$

así que

$$\binom{-1/2}{3}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}=-\frac{5}{16},$$

etc.

3. De la fórmula de Newton se deduce, inmediatamente, la desigualdad

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad \text{para} \quad x\geqslant 0.$$

Haciendo $1+x=A$, obtenemos, para $A \geqslant 1$:

$$A^n \geqslant 1+n(A-1).$$

Ambas desigualdades son válidas para un número natural n cualquiera.

4. La igualdad

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

se cumple para todo número natural n, cuando $q \neq 1$.

Esta es la bien conocida fórmula para la suma de la progresión geométrica.

5. El lector sabe, por su Geometría elemental, que los ángulos se miden en grados. En Matemáticas superior es preferible, sin embargo usar los llamados radianes como medida de los ángulos.

Sea K un círculo con centro en el origen de coordenadas OXY, de radio unitario.

Elegimos en el plano OXY un sentido definido de rotación (en la Fig. 1 se indica con una flecha) que consideraremos positivo ; una rotación en sentido contrario se tomará como negativa.

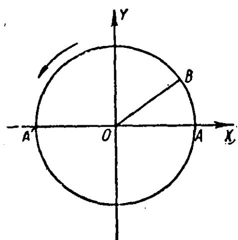


Fig. 1

Sea x un número arbitrario. Tomemos sobre la circunferencia del círculo K (partiendo de A) un arco de longitud $|x|$ en el sentido positivo o en el negativo y tendremos $x>0$, $x<0$ respectivamente. (En el caso de $x = 0$, el arco se reduce al punto A). El punto B determina completamente el extremo del arco sobre la circunferencia del círculo K. El número x es la medida cíclica del ángulo AOB.

Evidentemente, todo ángulo tiene una infinidad de valores +) en unidades cíclicas que difieren entre sí en un múltiple de la longitud de la circunferencia, es decir, en $2\pi n$ (n, entero). Para pasar de la medida en grados a radianes se usa la fórmula

$$x=\frac{\pi a}{180}+2n\pi,$$

donde x expresa la medida en radianes, a el número de grados y n es un número entero arbitrario.

Por ejemplo, la medida en radianes del ángulo recto XOY será la cuarta parte de la circunferencia, es decir, $\frac{\pi}{2}$, y tambien cualquier número de la forma $\frac{\pi}{2}+2n\pi$ (n, entero); la medida en radianes del ángulo semicircular AOA' será la mitad de la circunferencia, esto es π, y también cualquier número $\pi+2n\pi$ (n , entero), por consiguiente, todo múltiplo impar de π, etc.

6. Recordemos las conocidas desigualdades:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$
$$|a-b|\geqslant|a|-|b|,$$

válidas para números cualesquiera a, b.

7. Se dice que los números a y b difieren en menos de ε, si tiene lugar la desigualdad $|a-b|<\varepsilon$ es decir, las desigualdades

$$-\varepsilon<a-b<+\varepsilon.$$

CAPITULO I
TEORIA DE LAS SECUENCIAS
CONCEPTO DE SECUENCIA

1. Definición de secuencia.[+] Si se tiene una ley según la cual a cada número natural corresponde un número determinado se dice que una secuencia de números ha sido dada.
Ejemplo. Sea una ley, según la cual a cada número natural correspon de un número en la siguiente forma: al número 1 corresponde 1, al nú mero 2 corresponde $\frac{1}{2}$, al número 3 corresponde 1/3, etc., en general al número n corresponde 1/n. Escribiendo estos números obtenemos - la secuencia

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

El número correspondiente a la unidad se llama primer término - de la secuencia, el número que corresponde al dos es el segundo tér- mino de la secuencia, etc., el número correspondiente á n es el ené - simo término de la secuencia.

Los términos de una secuencia se representan en la siguiente for ma: tomamos una letra arbitraria, a, por ejemplo, el primer término lo representamos con el símbolo a_1, el segundo término con el símbo- lo a_2 etc., el término general (enésimo) con el símbolo a_n. Se leen -- así: a primera ó a índice 1, a segunda ó a índice 2, etc., a enésima ó a índice n. Observemos que si a_n es el enésimo término de una secuen- cia, a_{n+1} sería el término subsecuente, a_{n+2}; será el segundo término subsecuente etc., y el término a_{n+k} será el k-ésimo después de a_n -- Asímismo, a_{n-1} es el término que precede al a_n, a_{n-2} el que precede- al a_{n-1}, etc., La secuencia cuyo término general es a_n frecuentemente se representa en forma abreviada por $\{a_n\}$; por ejemplo, la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ se representa con el símbolo $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Nos proponemos ahora este problema ¿en qué forma puede obte- nerse una cierta secuencia? . O en otras palabras ¿ por qué método - puede darse una secuencia? En diversos casos puede procederse de - manera diversa.

Mostremos algunos métodos para formar secuencias.

1. Damos una secuencia mediante una fórmula, digamos por ejemplo

$$a_n = 5n.$$

Vemos de inmediato que

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 5 \cdot 2 = 10, \quad a_3 = 5 \cdot 3 = 15, \ldots, \quad a_{20} = 5 \cdot 20 = 100, \ldots$$

Análogamente, dada la secuencia mediante una fórmula, haciendo

$$a_n = 5n^2 - n + 1.$$

+ Llamada también sucesión.N.de los T.

entonces $a_1=5,\ a_2=19,\ a_3=43, \ldots, a_{100}=49901, \ldots$

2. Damos una secuencia diciendo, por ejemplo, que a_n es la enésima cifra del número $\sqrt{2}$. Encontramos que

$$a_1=1,\quad a_2=4,\quad a_3=1, \ldots$$

Calculando $\sqrt{2}$ por medio del conocido algoritmo encontramos la primera, segunda, tercera, etc., cifras., Así pues, nuestra secuencia queda determinada.

Similarmente definimos una secuencia diciendo que a_n es la cifra enésima del número π.

3. Otro método para dar una secuencia es el llamado método de recurrencia.+ Consiste en dar el primer término y el método de cálculo del término enésimo con auxilio de su predecesor. Aclaremos con algunos ejemplos.

a) Sea que el primer término es cero y cada uno de los siguientes el triple de su predecesor mas dos, es decir

$$a_1=0,\quad a_n=3a_{n-1}+2.$$

Tendremos

$$a_2=2,\ a_3=8,\ a_4=26, \ldots$$

b) Sea uno el primer término y cada uno de los siguientes igual a la suma de todos los términos precedentes, es decir

$$a_1=1,\quad a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}.$$

En este caso

$$a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=4,\ a_5=8, \ldots$$

c) Sea que el primer término tiene un valor a y cada uno de los siguientes es igual al precedente más un número d, es decir,

$$a_1=a,\ a_n=a_{n-1}+d \text{ (progresión aritmética)}$$

Tendremos

$$a_2=a+d,\ a_3=a+2d, \ldots$$

<u>2. Secuencias Monótonas.</u> Una secuencia es creciente si cada uno de sus términos es mayor que su precesor, es decir, $a_n>a_{n-1}$; es decreciente si $a_n<a_{n-1}$; es no-decreciente si $a_n\geqslant a_{n-1}$; y no-creciente si $a_n\leqslant a_{n-1}$. Se llama monótona a cada una de estas secuencias. Las secuencias decrecientes y las crecientes se dice que son estrictamente monótonas.

Ejemplos.

1. La secuencia $\{n\}$ de los números naturales es creciente.

2. La secuencia $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ de los inversos de los números naturales es decreciente.

3. La secuencia $\{a_n\}$, donde a_n representa la totalidad de los números naturales divisibles entre tres, no superiores á n, es no-decreciente:

$$a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_3=1,\quad a_4=1,\quad a_5=1,\quad a_6=2, \ldots$$

+ O método de recursión. N. de los T.

4. La secuencia $\left\{\frac{1}{E(\sqrt{n})}\right\}^*$ es no-creciente: $a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_4 = a_5 = \frac{1}{2}, \ldots$

3. <u>Secuencias acotadas.</u> Una secuencia es acotada si todos sus términos pertenecen a un intervalo finito (-M, +M) ó en otras palabras, cuando

$$(M > 0), \ |a_n| < M \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ejemplos.

1. La secuencia $\{a_n\}$, donde a_n es la enésima cifra decimal del número $\sqrt{2}$, es acotada, toda vez que $|a_n| < 10$.

2. La secuencia $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ es acotada, ya que $|a_n| < 1$.

Observemos que una secuencia acotada no necesariamente es monótona y viceversa. Por ejemplo, la secuencia

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\},$$

es decir, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, ..., es acotada pero no es monótona y la secuencia $\{n\}$ de los números naturales es monótona, pero no es acotada.

4. <u>Operaciones entre secuencias.</u> La multiplicación de una secuencia por un número, la suma, la resta, la multiplicación y la división de secuencias se definen de la siguiente manera.

Para multiplicar una secuencia por un número, se multiplica cada uno de sus términos por ese número. Por ejemplo, el producto de la secuencia $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots)$ por el número m es la secuencia $(ma_1, ma_2, ma_3, \ldots, ma_n, \ldots)$.

Dos secuencias se suman, restan, o multiplican, sumando, restando o multiplicando sus términos respectivos, Por ejemplo, dadas las dos secuencias:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

obtenemos:

sumando,

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots),$$

restando,

$$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots),$$

multiplicando,

$$(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots).$$

---

* E(x) representa el mayor entero que no excede á x. Por ejemplo, $E(5) = 5$, $E(\pi) = 3$, $E(\lg 2) = 0$, etc.

El número E(x), satisface la desigualdad $x - 1 < E(x) \leq x$, lo que se deduce inmediatamente de la definición.

El cociente puede definirse solamente en el caso en que todos los términos de la secuencia, entre la que se divide, sean diferentes de cero, ya que dividir entre cero es imposible.

Para dividir una secuencia entre otra (cuyos términos son diferentes de cero) se dividen los términos de la primera entre los correspondientes términos de la segunda. Esto significa que para las dos secuencias

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \quad \text{y} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

donde todo b_n es diferente de cero, su cociente es la secuencia

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots\right).$$

Las operaciónes indicadas, entre secuencias, se expresan simbólicamente en la siguiente forma:

$$m\{a_n\} = \{ma_n\},$$
$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},$$
$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\},$$
$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n b_n\},$$
$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, \quad b_n \neq 0.$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que la secuencia $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ es creciente.

2. Demostrar que la secuencia $\{a_n\}$, donde a_n es la enésima cifra de un número irracional arbitrario, no puede ser monótona.

3. Demostrar que para cualquier número x, arbitrariamente elegido, la secuencia $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ es acotada.

4. ¿ Es acotada la secuencia $\{1 + x + x^2 + \ldots + x^n\}$ para todo x?

CONCEPTO INTUITIVO DE LIMITE DE UNA SECUENCIA

5. Límite de una Secuencia Monótona. Al concepto de límite de una secuencia puede llegarse intuitivamente de la siguiente mane-

ra (Sea $\{a_n\}$ una secuencia monótona, creciente por ejemplo..Dos casos son posibles:

1) Los términos de la secuencia crecen ilimitadamente. Esto significa que para un número grande dado, todos los términos de la secuencia $\{a_n\}$, a partir de cierto término, son mayores que este número;

2) O bien,los términos de la secuencia $\{a_n\}$ no crecen ilimitadamente,existiendo un número g al que todos los términos de la secuencia $\{a_n\}$ se aproximan ilimitadamente,lo que significa que dado el número arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$ podemos encontrar cierto término de la secuencia, tal que todos los términos subsecuentes difieran de g en una cantidad menor que ε.

Este número g se llama límite de la secuencia y se escribe así:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Se dice que la secuencia $\{a_n\}$ converge a g.

Pueden hacerse observaoiones análogas en relación con las secuencias decrecientes.

Formularemos desde luego, la siguiente proposición:

Teorema. Toda secuencia monótona acotada tiene un límite (es convergente).

Ejemplos.

1. La secuoncia $\{n\}$ es creciente, pero no es acotada. Asímismo la secuencia $\{n^2\}$.
2. La secuencia $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ es creciente y acotada y su límite es 1.
3. La secuencia $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es acotada y decreciente, su límite es 0.
4. La secuencia $\left\{\frac{3n+1}{5n-1}\right\}$ ó $\left\{\frac{3}{5}+\frac{8}{5(5n-1)}\right\}$ es acotada y decreciente y su límite es 3/5.

6. Definición general de límite de una secuencia. Consideremos ahora una secuencia $\{a_n\}$ cualquiera no necesariamente monótona. Puede suceder que exista un número g, al que los términos de la secuencia se aproximen ilimitadamente. Esto significa que dado un número arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$ encontremos cierto término de la secuencia tal que todos los subsecuentes de éste, difieran de g, en una cantidad menor que ε.

Puede demostrarse que si tal número existe es único.

El número g se llama límite de la secuencia, y como antes, se representa por:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Si la secuencia $\{a_n\}$ no tiene límite se dice que es divergente,

Ejemplos.

1. La secuencia $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ es convergente, y su límite es igual a cero.

2. La secuencia $\{(-1)^n\}$ es divergente.

7. Criterio particular de convergencia. Frecuentemente resulta difícil determinar si una secuencia posee un límite o no, En muchos casos es útil el siguiente teorema:

Si la secuencia $\{c_n\}$ está comprendida entre dos secuencias $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, que convergen a un mismo límite, la secuencia $\{c_n\}$ converge a ese límite común.

Observación. Decimos que la secuencia $\{c_n\}$ está comprendida entre las secuencias $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ si para todo n se cumplen las desigualdades siguientes

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n.$$

Ejemplos.
1. La secuencia $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ tiene á x por límite; en efecto, tenemos

$$nx - 1 < E(nx) \leqslant nx,$$

por consiguiente,

$$x - \frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leqslant x,$$

y como cada una de las secuencias $\left\{x - \frac{1}{n}\right\}$, $\{x\}$ convergen al límite x, la secuencia $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ comprendida entre ellas, tendrá el mismo límite.

2. La secuencia $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$, donde a_n es la enésima cifra del número π, tiene á 0 por límite, ya que ella está comprendida entre las secuencias $\{0\}$, $\left\{\frac{9}{n}\right\}$, cuyo límite común es 0.

8. Operaciones entre secuencias convergentes. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos secuencias convergentes, puede demostrarse el siguiente:

Teorema. Para las secuencias convergentes $\{a_n \pm b_n\}$, $\{ca_n\}$, $\{a_n b_n\}$:

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;

2) Si c es un número arbitrario

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n;$$

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

Además, si $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces, la secuencia $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

es convergente y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

9. Secuencias que divergen a $+\infty$. Introduzcamos el siguiente método conveniente de expresión, Diremos que la secuencia $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ *, si para todo número arbitrariamente grande A existe cierto término de la secuencia a partir del cual todos los términos subsecuentes son mayores que A.

Lo que escribimos como sigue: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Ejemplos de estas secuencias son $\{n\}$, $\{2^n\}$, $\{n^2 - n\}$

Análogamente, diremos que la secuencia $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$, si para todo número arbitrariamente pequeño A (algebráicamente), existe cierto término de la secuencia, a partir del cual, todos los términos subsecuentes son menores que A. Se escribe como sigue:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Ejemplos de estas secuencias son las anteriores si se multiplican por -1.

Otros ejemplos lo son $\{n - n^2\}$, $\{-10^n\}$

Procede observar que las secuencias que divergen á $+\infty$ ó $-\infty$, no tiene límite y que los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ por ningún motivo son números, sino solamente una forma abreviada de escritura.

Observación, Si se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ sin ninguna explicación ulterior debe entenderse que la secuencia $\{a_n\}$ es convergente y que por consiguiente g es un número real y no uno de los símbolos $+\infty$, $-\infty$.

* Se dice también que " tiende a $+\infty$ ".

10. Teoremas sobre secuencias que divergen a $\pm\infty$.

Pueden demostrarse los siguientes teoremas.

a) Si la secuencia $\{a_n\}$ es acotada y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, tendremos

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-\infty,$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ bajo la condición de que $b_n\neq 0$ para todo n.

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$, tendremos

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=+\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=-\infty.$$

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$, tendremos

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=+\infty.$$

d) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=g,\ g\neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$, tendremos

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\begin{cases}+\infty \text{ para } g>0,\\ -\infty \text{ para } g<0\end{cases}$$

e) Si $\lim_{n\to\infty} a_n=g,\ g\neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n=0,\ b_n>0$, tendremos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}+\infty \text{ para } g>0,\\ -\infty \text{ para } g<0.\end{cases}$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que la secuencia $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ para cualquier número arbitrario x tiene á 0 como límite.

2. ¿ La secuencia $\{(-1)^n n\}$ diverge a $+\infty$ ó $-\infty$?

3. Demostrar que la secuencia $\{n^3-5n^2+3\}$, es decir,

$$\left\{n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\right\},$$

diverge a $+\infty$.

4. Demostrar lo mismo para la secuencia $\{3^n-n\}$, haciendo uso de la desigualdad $3^n \geqslant 1+2n$ (ver Introducción parágrafo 3).

DEFINICION RIGUROSA DEL LIMITE DE UNA SECUENCIAS

11. Segmentos de una secuencia. Si tenemos una secuencia $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$, cualquiera, diremos que el conjunto de términos que subsisten después de eliminar los n-1 primeros términos de dicha secuencia forman su segmento enésimo. Por ejemplo, el segmento sexto será el conjunto $a_6, a_7, a_8, \ldots,$ el centésimo será $a_{100}, a_{101}, a_{102}, \ldots$. En particular el primer segmento de una secuencia contiene a todos los términos de ella.

Los segmentos de una secuencia se representan por los símbolos $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$; el índice de A representa al número del segmento.

Así pues por ejemplo, A_6 representa el segmento sexto.

Expongamos algunas propiedades evidentes de los segmentos que nos serán de utilidad en lo que sigue.

1. Si se tienen dos segmentos cualesquiera, A_{50} y A_{100}, por ejemplo, entonces siempre, el último segmento está contenido en el primero; en nuestro caso, A_{100} está contenido en A_{50}.

2. Si tomamos un segmento arbitrario, A_{100} por ejemplo, únicamente un número finito de términos de la secuencia no forman parte de este segmento. En nuestro caso el segmento A_{100} solamente no contiene los 99 primeros términos, es decir, $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{99}$.

3. Recíprocamente, si tomamos arbitrariamente un número finito de términos, existe un segmento que no los contiene (por ejemplo, todo segmento de índice mayor que todos los índices de estos términos).

4. Análogamente, si se toman dos segmentos arbitrarios, A_{50} y A_{100} por ejemplo, solamente un número finito de términos de primer segmento no está contenido en el último. En nuestro caso los 50 primeros términos del segmento A_{50}, a saber: $a_{50}, a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{99}$ no están contenidos en el segmento A_{100}. Los términos restantes del segmento A_{50} están contenidos en A_{100}.

12. Secuencias que difieren entre sí únicamente en el orden de sus términos. De dos secuencias se dice que difieren entre sí, solamente por el orden de sus términos, si cada término aparece un número igual (finito o infinito) de veces en ambas secuencias, Ejemplos. Se dan a continuación secuencias que solo difieren en el orden de sus términos:

1. (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...) y (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...)

2. (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) y (2, 1, 4, 3, 6, 5, ...)

En tales secuencias tiene lugar el siguiente

Teorema. Si dos secuencias difieren entre sí solamente en el orden de sus términos, entonces cada segmento de una contiene un cierto segmento de la otra..

Demostración. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$, la primer secuencia y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ la segunda. Supongamos que ambas secuencias difieren entre sí solamente en el orden de sus términos. Consideremos un segmento cualquiera de la primer secuencia, A_n por ejemplo. Este segmento solamente no contiene a los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$. Estos últimos términos aparecen en la secuencia $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots$(quizá en otro orden . Como su número es finito en la secuencia $b_1, b_2 \ldots$ existe un segmento total que llamaremos B_r, que no los contiene. Es claro entonces que el segmento B_r está contenido en A_n. En efecto, cada término del segmento B es el último de los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, y el segmento A_n contiene todos los términos de la secuencia, excepto éstos.

Ejemplos, Sea $\{a_n\}$ la secuencia de los números naturales 1, 2, 3, 4, ..., es decir, $a_n = n$, y $\{b_n\}$ la secuencia 2, 1, 4, 3, 6, 5, ..., es decir $b_{2n-1} = 2n$, $b_{2n} = 2n - 1$. El segmento A_6 contiene, por ejemplo, a B_{10}.

13. Concepto de Aproximación. Se dice que cierto número a se aproxima á un número b con un error menor que ε, si $|a-b| < \varepsilon$.

Se dice tambien que a es un valor aproximado del número b, con un error menor que ε.

Supongamos que a se aproxima á b con un error menor que ε. Es claro entonces que a se aproxima á b con un error menor que η, si $\eta > \varepsilon$.

En cambio, si $\eta < \varepsilon$, es posible que a no se aproxime á b con error menor que η.

El concepto de valor aproximado es muy importante, ya que en la práctica trabajamos casi siempre con números aproximados. Ello ocurre, bien porque los valores exactos nos son desconocidos (las medicio-

nes siempre resultan inexactas con mayor o menor error dependiendo de la precisión de los instrumentos de medición) o bien porque las operaciones para obtener los datos numéricos resultan demasiado complicadas para obtener valores exactos. En los cálculos se emplean, por consiguiente, valores más o menos aproximados, dependiendo de la exactitud que pueda lograrse.

Ejemplos.

1. El número 3.1416 se aproxima al número π con un error menor que $\frac{1}{20000}$. Esto significa que

$$|\pi - 3{,}1416| < \frac{1}{20000}$$

2. El número 1.41 se aproxima a $\sqrt{2}$ con un error menor que 1/200. Si a se aproxima á b con un error menor que ε, entonces, como se ha dicho $|a-b|<\varepsilon$. También puede escribirse

$$a-\varepsilon<b<a+\varepsilon$$

(ver Introducción, parágrafo 7).

Diremos que un segmento de una secuencia se aproxima a cierto número g con un error menor que ε, si cada uno de los términos de este segmento se aproxima á g con un error menor que ε .

Por ejemplo, sobre la secuencia 1, 1/2, 1/3, ..., 1/n puede decirse que el segmento A_{1001} se aproxima á 0 con un error menor que 1/1000.

Si un segmento de una secuencia se aproxima a un número g, con error menor que ε entonces todo segmento contenido en aquél , es decir, todo segmento subsecuente, también se aproxima á g con un error menor que ε.

Por ejemplo, en la secuencia considerada el segmento A_{2000}, también se aproxima a cero con un error menor que 1/1000.

14. Definición de límite. Se dice que el número g es el límite de la secuencia $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ si en esta secuencia existe un segmento que se aproxime á g con un error convenientemente pequeño, en otras palabras, si para cada número $\varepsilon>0$ existe un segmento que se aproxime á g con un error menor que ε *.

Lo que se escribe así :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

En lugar de decir que una secuencia tiene un límite g, frecuentemente se dice que la secuencia converge á g ó que la secuencia tiende á g. Análogamente, en lugar de decir " la secuencia tiene un límite" es común decir : " la secuencia es convergente".

Ejemplos.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

* Como es fácil ver, la definición anterior de límite es equivalente a esta definición.

2. La secuencia (0, 6, 0, 66, 0, 666, ...) tiene un límite igual al número 0,666 ....= 2/3 .

3. La secuencia cuyo término general es $a_n = \frac{n}{n+1}$ tiene un límite igual á 1. Para demostrarlo tomemos un segmento arbitrario A_N. Si a_n pertenece al segmento A_N, es decir, si $n \geqslant N$, entonces

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N},$$

es decir, que el segmento A_N se aproxima al número 1 con un error menor que 1/N. Por consiguiente, si queremos que el error sea menor que cierto número definido $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{1000}$, por ejemplo) es suficiente elegir á N de manera que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, es decir que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Así pues, todo segmento con índice mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$, se aproxima á 1 con un error menor que ε. Como ε es un número arbitrario, existe un segmento que se aproxima á 1 con un error arbitrariamente pequeño, por tanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Este es un método típico de demostración de que cierta secuencia $\{a_n\}$ tiene un límite g. Analicemos esta demostración.

Ante todo se considera un segmento A_N arbitrario y un término a_n arbitrario también de este segmento, es decir un término cuyo índice es mayor o igual á N. Estudiaremos la diferencia $|g - a_n|$ y nos proponemos conociendo N, determinar cierto número para el que todo $|g - a_n|$ sea menor que dicho número, toda vez que $n \geqslant N$ es decir, toda vez que a_n se aproxime á A_n. En el ejemplo anterior tal número fué 1/N. Este número se definirá mediante una expresión que dependerá exclusivamente de N y no de n. Nos resta demostrar que existen segmentos para los que los números correspondientes son arbitrariamente pequeños.

Así pues, si la secuencia tiene un límite g, entonces para un número arbitrario $\varepsilon > 0$ existe un segmento de la secuencia A_N, cuyos términos todos se aproximan á g con un error menor que ε Por consiguiente los únicos términos que no se aproximan á g, con un error menor que ε, esto es que no pertenecen al segmento A_N son finitos en número. Por lo tanto podemos formular la siguiente proposición:

Si $\lim_{n \to \infty} a_n = g$ y cierto $\varepsilon > 0$ es dado, existirá solamente un número finito de términos de la secuencia que difieran de g en ε o en otra cantidad mayor que ε.

Reciprocamente, si para una secuencia $\{a_n\}$ dada se demuestra que existe cierto número g, tal que para un número arbitrariamente elegido $\varepsilon > 0$ solamente un número finito de términos de esta secuencia difieran de g en una cantidad no menor que ε, tendremos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g.$$

En efecto elegido un número arbitrario $\varepsilon > 0$, podemos afirmar que en la secuencia existe un segmento A_N que no contiene un sólo término del número finito de términos mencionados; por consiguiente, todos los términos de este segmento se aproximan á g con un error menor que ε.

El razonamiento anterior se usa frecuentemente para demostrar que cierto número es el límite de una secuencia dada.

Ejemplo 4. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+2}=\frac{3}{5}$.

Tomaremos un número arbitrario $\varepsilon > 0$ e investigaremos, cuántos de los términos difieren de 3/5 en menos que ε. Para ello estudiaremos la diferencia $\left|\frac{3}{5}-a_n\right|$. Tenemos:

$$\left|\frac{3}{5}-a_n\right|=\left|\frac{3}{5}-\frac{3n+1}{5n+2}\right|=\left|\frac{1}{25n+10}\right|=\frac{1}{25n+10}.$$

Así pues, solamente aquellos términos para los que $\frac{1}{25n+10}\geqslant\varepsilon$ difieren de 3/5 en menos de ε (donde n es el índice del término considerado). De aquí se deduce que $25n+10\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$, $25n\leqslant\frac{1}{\varepsilon}-10$, por consiguiente

$$n\leqslant\frac{\frac{1}{\varepsilon}-10}{25}.$$

No obstante, existe solamente un número finito de números naturales que no exceden al número dado. Por tanto, los números naturales que no exceden, en particular, al número$(1/\varepsilon - 10)/25$ no existen en absoluto (por ejemplo, para $\varepsilon=5$, $\varepsilon=1/20$), o bien existen solamente en número finito. Así pues, la desigualdad $|3/5-a_n|\geqslant\varepsilon$ se satisfará solamente para un número finito de términos . De aquí se desprende que

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{5}.$$

Observación. En la demostración de que una secuencia dada $\{a_n\}$ tiene un límite g, esto es, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un segmento A_n que se aproxima á g con un error menor que ε, siempre puede tomarse un ε menor que cierto número α arbitrario positivo (1/100, por ejemplo) ya que si el segmento A_n se aproxima á g con un error menor que $\varepsilon<\alpha$, con mayor razón se aproximará á g con un error menor que el número arbitrario $\varepsilon\geqslant\alpha$.

Hechas estas observaciones podremos proseguir más rápidamente.

PROBLEMAS

1. Demostrar que la secuencia cuyo límite general es

$$a_n=\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

tiene un límite igual á 1/2.

2. Demostrar que la secuencia cuyo término general es

$$a_n = \frac{1}{x^n}(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$$

converge, cuando $x > 1$ al límite $\frac{x}{x-1}$.

Demostrar que la secuencia

$$\left\{\frac{3n^2 - 2n + 6}{7n^2 + 12}\right\}$$

tiene un límite igual á 3/7.

4. Demostrar que la secuencia $\left\{\frac{\binom{n}{5}}{n^5}\right\}$ tiene un límite igual á 1/120.

TEOREMAS SOBRE LOS LIMITES DE LAS SECUENCIAS

15. Convergencia de una secuencia de términos iguales. Si todos los términos de una secuencia $\{a_n\}$ son iguales a uno y al mismo número g, la secuencia converge a ese número.

Por ejemplo, la secuencia $a_n = \frac{1}{2}$, esto es 1/2, 1/2, 1/2, ... tiene á 1/2 por límite.

La demostración se desprende de la siguiente observación. Para cualquier número $\varepsilon > 0$ arbitrario que tomásemos, todos los términos de la secuencia se aproximarán á g con un error menor que ε, toda vez que se aproximan á g con un error igual a cero:

$$|g - a_n| = |g - g| = 0.$$

16. Independencia del límite respecto del orden de los términos. El límite de una secuencia convergente no dependen del orden de sus términos. Esto significa que el límite de una secuencia convergente no varía si se altera el orden de los términos.

Por ejemplo, la secuencia $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene un límite igual á 0, si se modifica el orden de los términos de manera que los de orden par pasen un lugar hacia atrás, y los términos de orden impar se adelanten un lugar, obtenemos la siguiente secuencia:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots$$

Esta nueva secuencia también tiene como límite 0.

Demostración. Sea que la secuencia $\{a_n\}$ tiene un límite g. Sea, además, $\{b_n\}$ la secuencia que se obtiene al modificar el orden de los términos de la secuencia $\{a_n\}$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, también para un número $\varepsilon > 0$ arbitrariamente elegido, existe un segmento A_n que se aproxima á g con un error menor que ε. Más en virtud del teorema expuesto en la ---

Pág. 13, el segmento A_n contiene en sí mismo algún segmento de la secuencia $\{b_n\}$, el segmento B_K, digamos. Es claro que el segmento B_K por cuanto está contenido en el segmento A_N también se aproxima a g con un error menor que ε. Por consiguiente tomando un número arbitrario $\varepsilon > 0$, podemos encontrar en la secuencia $\{b_n\}$ un segmento que se aproxime á g con un error menor que ε, de modo que $\lim_{n \to \infty} b_n = g$.

Observación. Del teorema anterior se deduce que si la secuencia $\{a_n\}$ es divergente, entonces toda secuencia que difiera de ésta tan solo en el orden de sus términos, también es divergente.

17. Convergencia de las secuencias. Toda subsecuencia de una secuencia convergente tiene el mismo límite de la secuencia original.

Observación. De una secuencia se obtiene una subsecuencia extrayendo un número infinito de sus términos en el mismo orden en que inicialmente se encontraban.

Ejemplo 1. Consideremos la secuencia $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$. Tomemos de ella todos sus términos de índice impar. Obtenemos la nueva secuencia $\{b_n\}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots,$$

así que $b_n = \frac{1}{2n-1}$. Como $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

Demostración. Sea $\{a_n\}$ la secuencia original, convergente a un límite g, y $\{b_n\}$ una subsecuencia de ésta. Dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomamos un segmento A_N tal que se aproxime á g con un error menor que ε. Es claro que el segmento A_N contiene en sí mismo cierto segmento B_K de la secuencia $\{b_n\}$, ya que $\{b_n\}$ es una subsecuencia de la secuencia $\{a_n\}$. Por tanto, B_K también se aproxima á g con un error menor que ε. En otras palabras, dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, encontramos un segmento B_K que se aproxima á g con un error menor que ε; lo que significa que

$$\lim_{n \to \infty} b_n = g.$$

Ejemplo 2. La secuencia $\left\{\frac{3n+1}{5n+2}\right\}$ (Pág. 16) converge al límite 3/5.

Por tanto las secuencias

$$\left\{\frac{3(n^2+n)+1}{5(n^2+n)+2}\right\}, \quad \left\{\frac{3(2n+1)+1}{5(2n+1)+2}\right\}, \quad \left\{\frac{3\cdot 2^{n^2}+1}{5\cdot 2^{n^2}+2}\right\},$$

son subsecuencias de aquella y tienen el mismo límite.

Observación. Observemos sin embargo, que si la secuencia contiene una subsecuencia convergente no se sigue siempre que la secuencia

original es convergente.

Por ejemplo, la secuencia 1, 1/2, 1, 1/4, 1, 1/6, ... es divergente pero la subsecuencia 1/2, 1/4, 1/6, ... converge a cero.

18. Límite de una secuencia con términos no negativos. Si todos los términos de una secuencia convergente son no negativos, entonces su límite también es no negativo.

La demostración se desprende al observar que si μ es un número negativo y α un número no-negativo, entonces $|\alpha-\mu| \geqslant |\mu|$. Así pues un número no-negativo difiere de un número negativo en no menos que la magnitud absoluta del número negativo. Por consiguiente, si $\{a_n\}$ es una secuencia cualquiera con términos no negativos y μ es cierto número negativo, entonces ningún segmento de esta secuencia se aproximará a μ con un error menor que μ. Esto es, el error no será arbitrariamente pequeño y por tanto μ no será el límite de nuestra secuencia. Por consiguiente, pues, su límite será un número no-negativo.

19. Límite de la suma y diferencia de secuencias. La suma de dos secuencias convergentes es una secuencia que converge a la suma de los límites de estas secuencias.

Ejemplo 1. Consideremos que las secuencias $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ son, respectivamente, $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{3n-1}{5n+1}\right\}$, $\left\{\frac{3n-1}{5n+1}+1-\frac{1}{n}\right\}=\left\{\frac{8n^2-5n-1}{5n^2+n}\right\}$.

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{3}{5},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

Demostración. Sea que la secuencia $\{a_n\}$ tiene un límite a, y la secuencia $\{b_n\}$ un límite b. Los términos de la secuencia $\{c_n\}$, son la suma de estos términos, esto es, $c_n = a_n + b_n$. Se requiere demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a+b.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n=b,$$

entonces, tomando un número arbitrario $\varepsilon>0$, encontramos los segmentos A_N y B_K que se aproximan á a y á b, respectivamente, con un error menor que ε.

Sea R un número entero mayor que N y K. Es evidente que los segmentos A_R y B_R, contenidos, respectivamente, en los segmentos A_N y B_K se aproximan también á a y á b, respectivamente, con un error menor que ε. Como cada sumando c_n, contenido en C_R es de la forma $a_n + b_n$, donde a_n y b_n se encuentran en A_R y B_R, entonces

$$|a-a_n|<\varepsilon, \quad |b-b_n|<\varepsilon,$$

por consiguiente,

$$|a+b-c_n|=|a+b-a_n-b_n|=$$
$$=|(a-a_n)+(b-b_n)|\leqslant|a-a_n|+|b-b_n|<2\varepsilon.$$

Así pues, el segmento C_R se aproxima á a+b con un error menor que 2ε. Si quisiéramos que el segmento C_R se aproximará á a+b con un error -- menor que cierto número arbitrario $\eta>0$, entonces sería suficiente con que inicialmente tomaramos un número $\varepsilon>0$, tal que $2\varepsilon<\eta$, esto - es, sería suficiente con tomar $\varepsilon<\frac{\eta}{2}$. Por consiguiente, al tomar un número arbitrario $\eta>0$, encontramos un segmento C_R que se aproximaría a+b con un error menor que η, lo que significa que

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a+b.$$

Ejemplo 2. La secuencia

$$\left\{\frac{2n}{n^2-1}\right\}=\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right\}=\left\{\frac{1}{n+1}\right\}+\left\{\frac{1}{n-1}\right\}$$

converge a cero.

Observación. El teorema anterior puede enunciarse en la siguiente forma: Si las secuencias $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n.$$

En relación con la diferencia de dos secuencias puede establecerse - una proposición semejante. Así que,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n.$$

La demostración es análoga, ya que

$$|a-b-c_n|=|a-b-a_n+b_n|=$$
$$=|(a-a_n)-(b-b_n)|\leqslant|a-a_n|+|b-b_n|\leqslant 2\varepsilon.$$

20. Límite del producto de dos secuencias. El producto de dos secuencias convergentes es una secuencia - convergente y su límite es igual al producto de los -- límites de las secuencias dadas.

Ejemplo 1. Sea que $\{a_n\}$ es la secuencia $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$, $\{b_n\}$

la secuencia $\left\{\frac{3n-1}{5n-1}\right\}$, y, $\{c_n\}$ la secuencia $\{a_n \cdot b_n\}$; Entonces,

$$c_n = a_n b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{3n-1}{5n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n-1}{5n-1} = \frac{3n^2-4n+1}{5n^2-n}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{5}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

Demostración. Supongamos que la secuencia $\{a_n\}$ tiene un límite a y sea b el límite de la secuencia $\{b_n\}$. Los términos de la secuencia $\{c_n\}$, son el producto de estos términos y tienen la forma $c_n = a_n b_n$.

Se requiere demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = ab.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, entonces, tomando un número arbitrario positivo $\varepsilon < 1$ (ver la observación de la Pág. 16) encontramos los segmentos A_N ý B_K que se aproximan á a y á b, respectivamente, con un error menor que ε. Sea R un número entero, mayor que N y que K, simultáneamente; los segmentos A_R y B_R están contenidos en A_N y B_K respectivamente, y se aproximan también á a ý á b, con un error menor que ε. Investiguemos con que error se aproxima á ab el segmento C_R. Cada uno de los términos c_n, del segmento C_R, es igual á $a_n b_n$, donde a_n y b_n pertenecen á A_R y á B_R, respectivamente. Como

$$|a - a_n| < \varepsilon, \quad |b - b_n| < \varepsilon,$$

entonces, haciendo $a_n - a = \alpha_n$, $b_n - b = \beta_n$, obtenemos:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab| = |\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n| \leq \\ &\leq |\alpha_n b| + |\beta_n a| + |\alpha_n \beta_n| = |a_n - a| \cdot |b| + |b_n - b| \cdot |a| + \\ &+ |a_n - a| \cdot |b_n - b| < \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon) < \varepsilon(|a| + |b| + 1). \end{aligned}$$

Así pues,

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1).$$

Si fuera necesario que el segmento C_R se aproximara al producto ab con un error menor que cierto número arbitrario $\eta > 0$, bastaría con escoger, inicialmente, $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon(|a| + |b| + 1) < \eta,$$

ó

$$\varepsilon < \frac{\eta}{|a| + |b| + 1}.$$

Por consiguiente, tomando un número arbitrario $\eta > 0$. puede encontrarse cierto segmento C_R todos cuyos términos se aproximan á ab con - un error menor que η, con lo que significa que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = ab.$$

Observación. El teorema anterior puede enunciarse en la si---- guiente forma: Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos secuencias convergentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 2. La secuencia

$$\left\{\frac{(2n-1)(3n-2)}{n^2}\right\} = \left\{\frac{2n-1}{n}\right\} \cdot \left\{\frac{3n-2}{n}\right\} = \left\{2-\frac{1}{n}\right\} \cdot \left\{3-\frac{2}{n}\right\}$$

es convergente y tiene un límite igual a 6.

21. Límite del producto de una secuencia por un número. Si la secuencia $\{a_n\}$ es convergente y su límite es a; ý m es un número arbitrario, entonces la secuencia $\{ma_n\}$ es convergente y su límite es igual á ma, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} (ma_n) = m \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Obtenemos la demostración de esta proposición apoyándonos en el -- teorema anterior, haciendo $b_n = m$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ejemplo. Si la secuencia $\{a_n\}$ es convergente y su límite es g, tendremos que la secuencia $\{-a_n\}$ tiene un límite igual á -g.

22. Límite del cociente de dos secuencias. El cociente de dos secuencias convergentes tiene un límite igual - al cociente de sus límites, bajo la condición que todos los términos y el límite mismo de la secuencia denominador, sean diferentes de cero.

Sea por ejemplo, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{3n+1}{5n+1}$.

Entonces

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{5n^2+6n+1}{3n^2+n}.$$

Como

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{5},$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3}.$$

Demostración. Procediendo al igual que en la demostración del - teorema sobre el límite de un producto, obtenemos los segmentos A_R y - B_R que se aproximará á a y b respectivamente, con un error menor que ε.

Aceptemos además, que $\varepsilon < \frac{1}{2}|b|$ (ver la observación de la Pág. - 16). Investiguemos ahora con qué error se aproxima el segmento C_R al- cociente a/b. Dando a las literales α_n y β_n el mismo significado que en la demostración del teorema sobre el producto, obtenemos:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}\right| \leqslant \frac{|b|\cdot|\alpha_n| + |a|\cdot|\beta_n|}{|b|\cdot|b+\beta_n|}.$$

Como $\varepsilon < \frac{1}{2}|b|$, entonces

$$|b+\beta_n| \geqslant |b| - |\beta_n| \geqslant |b| - \varepsilon \geqslant |b| - \frac{1}{2}|b|,$$

ya que

$$|b+\beta_n| \geqslant \frac{1}{2}|b|.$$

En virtud de la desigualdad anterior, podemos escribir:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{|b|+|a|}{\frac{1}{2}|b|^2}\,\varepsilon.$$

Si desearamos que el segmento C_R se aproximara a a/b con un error menor que cierto número arbitrario $\eta > 0$, será suficiente con tomar, - inicialmente, $\varepsilon > 0$ de manera que

$$1)\ \varepsilon < \frac{1}{2}|b|;$$

$$2)\ \frac{|b|+|a|}{\frac{1}{2}|b|^2}\,\varepsilon < \eta.$$

En otras palabras, es suficiente con tomar un número positivo me-- nor que los números:

$$\frac{1}{2}|b| \ \text{ y } \ \frac{\frac{1}{2}|b^2|\eta}{|a|+|b|}.$$

Así pues, tomando un número arbitrario $\eta > 0$, podemos encontrar- un segmento C_R cuyos términos se aproximan todos al cociente a/b, con un error menor que η, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}.$$

Observación. El teorema anterior puede escribirse en la siguien te forma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

(satisfechas las condiciones indicadas antes)

PROBLEMAS

1. Demostrar que la secuencia $\left\{\frac{3n^2+18}{\frac{1}{2}n^3+1}\right\}$ tiene un límite igual a cero.

2. Demostrar que la secuencia $\left\{\frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right\}$ tiene un límite igual a $\frac{1}{k!}$.

3. Demostrar que la secuencia $\left\{\frac{5n^2+2}{7n^2-9}\cdot\left(1+\frac{4}{n}+\frac{7n-1}{14n^2+3}\right)\right\}$ tiene un límite igual a 5/7.

4. Demostrar que si las secuencias $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen los mismos límites, entonces la secuencia $\{a_n-b_n\}$ tiene un límite igual a cero.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

23. Convergencia de secuencias monótonas y acotadas.

Presentamos el problema de cómo determinar la convergencia de una secuencia dada. Previamente formularemos la siguiente proposición:

Teorema: Toda secuencia monótona y acotada es convergente.

Omitiremos la demostración de este teorema a causa de su complejidad. Observemos, sin embargo, que tal teorema es, intuitivamente, evidente. Por ejemplo, la secuencia de las áreas de los polígonos regulares de 2^n lados inscritos en un círculo es creciente y acotada (ya que todas ellas están, como en el caso del cuadrado, dentro del círculo); lo que fué intuitivamente claro ya a Arquímedes. Esta secuencia tiene como límite el área del círculo.

Sin embargo, no toda secuencia convergente es monótona, Por ejemplo la secuencia $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, como fácilmente se advierte, tiene un límite igual á 1, pero no es monotona.

24. Condición de Cauchy. Diremos que una secuencia $\{a_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si existe la ley de que a todo número positivo ε corresponde un segmento de la secuencia, tal que dos términos cualesquiera del segmento difieran entre sí una cantidad menor que ε.

Teorema. Toda secuencia convergente satisface la condición de Cauchy (ó en otras palabras, la condición de Cauchy es necesaria para la convergencia).

Ejemplo. La secuencia $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, que como se sabe -- (Pág. 15) es convergente al límite 1, satisface la condición de Cauchy.- En efecto tenemos:

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| = \frac{|n-m|}{(n+1)(m+1)} \leqslant \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Así pues, si $m > N$, $n > N$, entonces

$$|a_n - a_m| < \frac{2}{N},$$

así que para $N > \frac{2}{\varepsilon}$, $m > N$, $n > N$ obtenemos: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Demostración. Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Si η es un número positivo arbitrario, existirá un segmento A_N que se aproxima á a con un error menor que η. Sean a_m y a_p dos términos del segmento A_N. Entonces

$$|a_m - a| < \eta, \ |a_p - a| < \eta.$$

Como

$$|a_m - a_p| = |a_m - a + a - a_p| \leqslant |a_m - a| + |a - a_p|,$$

luego

$$|a_m - a_p| < 2\eta.$$

Si ahora ε es un número positivo arbitrario, haciendo $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, observamos que dos términos a_m y a_p cualesquiera del segmento A_N -- difieren entre sí una cantidad menor que $2\eta = \varepsilon$. Por consiguiente nuestra secuencia satisface la condición de Cauchy.

Es posible también demostrar el teorema recíproco.

Teorema. Toda secuencia que satisface la condición de Cauchy es convergente (esto es, la condición de Cauchy es suficiente para la convergencia).

Reuniendo ambos teoremas obtenemos la siguiente proposición:

Teorema. Para que una secuencia sea convergente es necesario y suficiente que satisfaga la condición de Cauchy.

25. Acotación de las secuencias convergentes. Si la secuencia $\{a_n\}$ converge a un límite g, todos sus términos a partir de un cierto término satisfarán la desigualdad $|a_n - g| < 1$, o lo que es lo mismo, a las desigualdades $-1 < a_n - g < 1$ ó tambien a las desigualdades $g - 1 < a_n < g + 1$. . De estas desigualdades y del hecho de que los términos segregados son finitos en número se concluye que la secuencia $\{a_n\}$ es acotada.

Así pues, demostramos el

Teorema. Toda secuencia convergente es acotada.

Como se vió en el ejemplo de la secuencia $\{(-1)^n\}$, esta es acotada pero divergente, por lo que el teorema recíproco no es verdadero.

26. Convergencia de una secuencia comprendida entre otras dos secuencias. Si tres secuencias dadas $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, satisfacen las condiciones:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g;$$
$$2)\ a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad (\text{para } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

entonces la secuencia $\{c_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = g.$$

Demostración. Fijemos un número positivo arbitrario ε. Existen dos segmentos A_N y B_N que se aproximan á g con un error menor que ε. Demostremos que el segmento C_n se aproxima á g -- con un error menor que ε. Si tomamos á c_n como perteneciente - al segmento C_n, entonces por la condición dada, tenemos

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n.$$

de donde

$$g - b_n \leqslant g - c_n \leqslant g - a_n;$$

pero los términos a_n y b_n pertenecen a los segmentos A_N y B_N, - respectivamente, es decir:

$$-\varepsilon < g - b_n,$$
$$g - a_n < \varepsilon$$

De donde obtenemos las desigualdades

$$-\varepsilon < g - c_n < \varepsilon,$$

esto es

$$|g - c_n| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, cada uno de los términos del segmento C_N se aproxima á g con un error menor que ε. . Como ε ha sido elegido arbitrariamente, tendremos

$$\lim_{n\to\infty} c_n = g.$$

Ejemplo. Sea

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Tenemos:

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant c_n \leqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}};$$

pero como

$$\sqrt{n^2+n} < n+1, \quad \sqrt{n^2+1} > n,$$

y como además

$$\frac{n}{n+1} \leqslant c_n \leqslant n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Haciendo $a_n = \frac{n}{n+1}$ y $b_n = 1$, tenemos, como es sabido,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

PROBLEMAS.

1. Demostrar que si la secuencia $\{a_n\}$ tiene un límite g, entonces la secuencia $\{a_n^2\}$ tiene un límite g^2.

2. Demostrar que si la secuencia $\{a_n\}$ tiene un límite g, entonces la secuencia $\{5a_n^2 + 18a_n - 1\}$ tiene un límite $5g^2 + 18g - 1$. Generalizar este resultado.

3. Demostrar que la secuencia $\{a_n\}$, definida en la siguiente forma:

$$a_1 = 0, \; a_2 = 1, \; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad (n > 2),$$

es decir, la secuencia

0, 1, 1/2, 3/4, 5/8, 11/16, 21/32, ...,

posee la propiedad

$$a_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

y que por consiguiente converge al límite 2/3 (demuéstrese por inducción).

4. Demostrar que la secuencia

$$\left\{\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_{k-1} n + b_k}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \ldots + a_{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} + a_k \frac{1}{n^k}}{b_0 + b_1 \frac{1}{n} + \ldots + b_{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} + b_k \frac{1}{n^k}}\right\}$$

converge al límite $\frac{a_0}{b_0}$ bajo las condiciones:

$$b_0 \neq 0, \quad b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k \neq 0$$

para todo n.
5. Demostrar que si la secuencia $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n > 0)$ es monótona entonces la secuencia

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}\right\}.$$

también es monótona.
6. Demostrar que la secuencia

$$\left\{\frac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}\right\}$$

tiene un límite igual a $\frac{x}{2}$
7. Sea

$$a_1 = \sqrt{x}, \quad a_{n+1} = \sqrt{x + a_n} \quad (x > 0),$$

así que

$$a_2 = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad a_3 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$ y así sucesivamente.

Demostrar que la secuencia $\{a_n\}$ es creciente y que $a_n < x + 1$ (por inducción) y por lo tanto, la secuencia $\{a_n\}$ es convergente.
8. Por medio del resultado del problema 7 y de la fórmula

$$a_{n+1}^2 = x + a_n,$$

demostrar que el límite g de la secuencia $\{a_n\}$ satisface a la ecuación

$$g^2 = x + g,$$

de donde

$$g = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x}$$

9. Demostrar que toda secuencia formada por ceros y unos, en número infinito, es divergente.
10. Demostrar que una secuencia cuyos términos son números enteros es convergente cuando y solamente cuando, a partir de cierto término todos los términos subsecuentes tienen el mismo valor.
11. Demostrar que el límite g de una secuencia $\{a_n\}$, cuyos términos satisfacen las desigualdades $A \leqslant a_n \leqslant B$, satisface estas mismas desigualdades.

CALCULO DE ALGUNOS LIMITES. EL NUMERO e.

27. Cálculo de algunos Límites. Demostremos ahora dos teoremas que utilizaremos en lo que sigue.

Teorema. Si con $\{a_n\}$ representamos una secuencia cualquiera de números naturales que tiende a $+\infty$, entonces:

1) $\lim_{n\to\infty} A^{\alpha_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } A>1, \\ 1 & \text{si } A=1, \\ 0 & \text{si } 0\leq A<1; \end{cases}$

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[\alpha_n]{A}=1$ si $A>0$.

Demostración. 1) Efectivamente, si $A>1$, , con base en una desigualdad conocida (ver Introducción, Pár. 3) tendremos:

$$A^{\alpha_n}\geqslant 1+\alpha_n(A-1).$$

Representemos por M un número positivo arbitrario. Como la se--- cuencia $\{\alpha_n\}$ tiende $+\infty$, contendrá un término α_N, a partir del cual todos los términos α_n satisfarán la desigualdad $\alpha_n>\frac{M-1}{A-1}$, , de donde $1+\alpha_n(A-1)>M$. . Para $n>N$ tenemos, por consiguiente, $A^{\alpha_n}>M$, y como M es arbitrario,

$$\lim_{n\to\infty} A^{\alpha_n}=+\infty.$$

Si A = 1, se tiene, para todo n, $A^{\alpha_n}=1$, , por consiguiente $\lim_{n\to\infty} A^{\alpha_n}=1$; ; y si A = 0 tendremos

$$A^{\alpha_n}=0 \ (n=1, 2, \ldots),$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} A^{\alpha_n}=0.$$

Finalmente, si $0<A<1$, tendremos $\frac{1}{A}>1$, ; por consiguiente - $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{A}\right)^{\alpha_n}=+\infty$. Como $A^{\alpha_n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^{\alpha_n}}$, y en base a un teorema visto antes (ver Pág. 11), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} A^{\alpha_n}=0.$$

2) Admitamos, inicialmente, que $A\geqslant 1$. . También $\sqrt[\alpha_n]{A}\geqslant 1$.
Por lo tanto, haciendo $\sqrt[\alpha_n]{A}=1+\varepsilon_n \ (\varepsilon_n\geqslant 0)$, , tendremos $A=$

$(1+\varepsilon_n)^{\alpha_n}\geqslant 1+\alpha_n\varepsilon_n$ (ver Introducción, Pár. 3), luego $0\leqslant\varepsilon_n\leqslant\frac{A-1}{\alpha_n}$. Como $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{A-1}{\alpha_n}=0$ (ver Pág. 11). Así pues

la secuencia $\{\varepsilon_n\}$ comprendida entre las secuencias $\{0\}$, y $\left\{\frac{A-1}{\alpha_n}\right\}$, converge a cero. De aquí, con apoyo en un teorema conocido (ver Pág. 26) se deduce que $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$; por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[\alpha_n]{A}=1.$$

Si $0<A<1$, , entonces $\frac{1}{A}>1$, luego $\lim_{n\to\infty}\sqrt[\alpha_n]{\frac{1}{A}}=1$. .Como

$$\sqrt[\alpha_n]{A}=\frac{1}{\sqrt[\alpha_n]{\frac{1}{A}}},$$

tendremos, en este caso, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[\alpha_n]{A}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[\alpha_n]{\frac{1}{A}}}=1.$

Nuestro teorema ha sido demostrado totalmente.

Teorema. La Igualdad.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

es válida para todo x.

Demostración. Sea x un número arbitrario. Tomemos un núme ro natural k, que satisfaga la desigualdad $|x|<k$. Representando el - número $\frac{|x|}{k}$, por θ , obtenemos:

$$\frac{|x|}{k+1}\leqslant\theta,\quad \frac{|x|}{k+2}\leqslant\theta,\ \ldots,$$

luego, para $n>k$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\frac{|x^k|}{k!}\cdot\frac{|x|}{k+1}\cdot\frac{|x|}{k+2}\cdots\frac{|x|}{n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|x^k|}{k!}\theta^{n-k}=\frac{|x^k|}{\theta^k k!}\theta^n.$$

Como $0<\theta<1$, , entonces θ^n tiende a cero cuando n crece ilimitada mente (ver el teorema anterior), por consiguiente $\frac{x^n}{n!}$ tiende a cero es decir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

28. El número e = 2.71828... En Matemática superior tiene gran importancia un número fundamental que se representa con el símbolo e . Este número puede definirse como el límite de la secuencia $\{a_n\}$, cuyo - enésimo término se expresa por la fórmula

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

así que

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Para que esta definición sea válida es necesario demostrar que la -- secuencia dada es convergente. Para ello será suficiente con demostrar- que dicha secuencia es monótona y acotada.

Demostración. Empleando el binomio de Newton, obtenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots$$
$$\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Considerando por ejemplo, el cuarto término de este desarrollo podemos presentarlo en la forma

$$\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Procediendo de esta manera con todos los términos, a partir del tercero, obtenemos la fórmula

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$
$$\dots+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\frac{1}{n}}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}.$$

La siguiente fórmula se obtiene de manera análoga

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{1\cdot 2}+$$
$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\frac{1}{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n+1)}.$$

Observemos ahora que el numerador de cada una de las fracciones que aparecen en estos desarrollos es menor que la unidad, toda vez que es el producto de números menores que uno. Respecto a los denominadores, observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1\cdot 2&=2^1,\\ 1\cdot 2\cdot 3&>1\cdot 2\cdot 2=2^2,\\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4&>1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^3,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots n&>1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\dots 2=2^{n-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Empleando la fórmula de la suma de una progresión geométrica, (ver Introducción, Par.4) obtenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{\frac{1}{2}},$$

así que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Hemos demostrado que la secuencia es acotada.

Demostremos ahora que es monótona. Observemos, ante todo, que el desarrollo de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene n + 1 términos y que el desarrollo de- $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ tiene n + 2 términos, es decir, tiene un término más.

Es fácil ver que

$$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1},\quad 1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1},\quad 1-\frac{3}{n}<1-\frac{3}{n+1}$$

etc., en general

$$1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}.$$

Por tanto

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)$$

etc. Vemos pues que los términos del primer desarrollo, a partir del tercero, resultan menores que los correspondientes términos del segundo - desarrollo y que además este segundo desarrollo tiene un término adicional. Por consiguiente,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Así pues, la secuencia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es monótona y acotada, luego tiene un límite.

Demostremos ahora el siguiente teorema.

Teorema. Si en la secuencia $\{r_n\}$ todos los términos tienen un módulo mayor que la unidad y $\lim_{n\to\infty}|r_n|=+\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}=e.$$

Demostración. Admitamos inicialmente que los términos de la secuencia $\{r_n\}$ son enteros positivos. Tomando un $\varepsilon>0$, arbitrario, podemos encontrar un número N tal que para todo $n>N$ (siendo n un número natural) se satisfaga la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon.$$

Como, por hipótesis, los números r_n son números naturales que satisfacen la condición $\lim r_n=+\infty$, puede afirmarse que a partir de cier-

to término todos los r_n exceden á N. Por consiguiente, para estos términos la expresión $\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}$ difiere de e en menos que ε. Y como ε es arbitrario, tendremos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}=e. \tag{1}$$

Pasemos ahora al caso general. Representemos por α_n un número natural grande que satisface la desigualdad

$$\alpha_n \leqslant |r_n|^*.$$

Observemos ahora que si r_n es un número positivo mayor que 2 (los números r_n cuyos módulos no exceden a 2 existen solamente en un número finito, ya que $\lim\limits_{n\to\infty}|r_n|=+\infty$), y por consiguiente, si $\alpha_n>1$, entonces

$$\frac{1}{\alpha_n-1}>\frac{1}{r_n}>\frac{1}{\alpha_n+1},$$

de donde

$$1+\frac{1}{\alpha_n-1}>1+\frac{1}{r_n}>1+\frac{1}{\alpha_n+1};$$

por tanto

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n+1}>\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}>\left(1+\frac{1}{\alpha_n+1}\right)^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Demostremos ahora que éstas desigualdades son válidas también para un r_n negativo, cuyo módulo sea mayor que 2. En efecto, para $r_n<0$ tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{|r_n|}}\right)^{|r_n|}=\left(\frac{|r_n|}{|r_n|-1}\right)^{|r_n|};$$

como

$$\frac{|r_n|}{|r_n|-1}=\frac{|r_n|-1+1}{|r_n|-1}=1+\frac{1}{|r_n|-1},$$

entonces

$$\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}=\left(1+\frac{1}{|r_n|-1}\right)^{|r_n|}. \tag{3}$$

Observemos ahora que

$$\alpha_n\leqslant|r_n|<\alpha_n+1,$$

por tanto

$$\alpha_n-1\leqslant|r_n|-1<\alpha_n,$$

---

* Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty$.

por consiguiente

de aquí
$$\frac{1}{\alpha_n - 1} \geqslant \frac{1}{|r_n| - 1} > \frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{\alpha_n + 1};$$
$$1 + \frac{1}{\alpha_n - 1} \geqslant 1 + \frac{1}{|r_n| - 1} > 1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}.$$

Finalmente obtenemos:
$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n + 1} > \left(1 + \frac{1}{|r_n| - 1}\right)^{|r_n|} > \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n}.$$

De aquí, según la fórmula (3) obtenemos la desigualdad (2) que tiene lugar para todo r_n cuyo módulo sean mayor que 2. Por cuanto los otros términos r_n pueden existir solamente en número finito, pueden ignorarse al calcular el límite.

Calculemos ahora los límites de las expresiones
$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n + 1} \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n}.$$

Tenemos:
$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n + 1} = \left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n - 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^2.$$

Observemos que en virtud de (1), toda vez que α_n son números naturales, que tienden a $+\infty$, para el primer factor obtenemos:
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n - 1} = e.$$

Por lo que toca al segundo factor, tendremos
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^2 = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)\right]^2 = 1.$$

Así pues,
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n + 1} = e. \tag{4}$$

Procediendo análogamente, obtenemos:
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}}\right] =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n + 1} \cdot \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)} = e \cdot 1;$$

por consiguiente,
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} = e. \tag{5}$$

En otras palabras, de (2), (4), (5) y del teorema de la Pág. 26 concluímos que
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e.$$

CAPITULO II

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1. Ejemplos de funciones. Concepto de función. Al concepto de función puede llegarse estudiando las relaciones existentes entre diversas cantidades. Puede acontecer que dos cantidades, en determinadas condiciones, se liguen entre sí de manera que a cada valor de la primera cantidad corresponda exactamente un determinado valor de la segunda. Si tal hecho tiene lugar, se dice que la segunda cantidad es una función de la primera.

Ejemplos.

1. El precio del azúcar, en un lugar dado y en un tiempo determinado se define especificando su cantidad, es decir, su peso. Por tanto el precio del azúcar es una función de su peso.

2. El precio de un boleto de tercera clase en ferrocarril es una función de la longitud de la trayectoria recorrida, así que los boletos expedidos para distancias iguales tienen el mismo precio.

3. Estudiando el movimiento de un cuerpo cualquiera advertimos que la trayectoria recorrida, desde el momento en que empezamos a observar el movimiento, es una función del tiempo transcurrido a partir de ese momento: la trayectoria recorrida por un tren desde el momento en que se inicia el movimiento es una función del tiempo transcurrido desde ese momento.

4. La experiencia demuestra que una y la misma masa de gas, a temperatura constante, tiene a igualdad de vólumenes la misma elasticidad; por consiguiente, la elasticidad de una masa de gas dada, a temperatura constante, es función de su volumen.

5. Como en todo momento del día la temperatura del aire, en una localidad dada, tiene un valor determinado, podemos decir que esta temperatura es función del tiempo.

6. La experiencia demuestra que una varilla metálica dada tiene, para cada temperatura, una longitud determinada; por consiguiente, la longitud de la varilla considerada es una función de su temperatura.

7. Dos círculos de igual radio tiene áreas iguales, por consiguiente, el área de un círculo es una función de su radio.

2. Notaciones. Si una cantidad Y es función de una cantidad X, entonces la cantidad X se llama variable independiente, y la cantidad Y, variable dependiente. Una dependencia funcional se representa por el símbolo.

$$Y = F(X).$$

Se escribe también $B = F(A)$ si B representa un valor particular de la cantidad Y, la que en la dependencia funcional antes indicada, corresponde a cierto valor particular A, de la cantidad X. (En lugar de la letra F frecuentemente se usan las letras f, φ, ϕ, etc.)

3. Definición rigurosa del concepto de función. El concepto de función puede definirse de otra manera, haciendo abstracción del concepto de cantidad, a saber: si se da una ley por medio de la cual a cada número de un conjunto definido de números Z se pone en correspondencia exactamente un número real, entonces se dice que en el conjunto Z se define una función *. Igual que antes, esta correspondencia se representa mediante el símbolo.

$$y = f(x)$$

donde x representa un número cualquiera del conjunto Z ó y representa al número que corresponde á x. Si x_0 es un número definido del conjunto Z, el símbolo $f(x_0)$ representará al número correspondiente á x_0. Por lo general, el conjunto Z es cierto intervalo (a, b).

4. Diferentes métodos para establecer una función. Detengámonos ahora en aquellos métodos mediante los cuales puede establecerse una función. Según la definición anterior es necesario que a cada valor de x, de un conjunto Z dado, corresponda precisamente un número definido y. Así ocurra, en particular, cuando esta correspondencia se establece mediante una fórmula, por ejemplo,

$$y=x^2+2x+3 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Existen, sin embargo, funciones que también satisfacen la definición anterior y que podemos establecer sin ninguna fórmula. Si, por ejemplo, a cada número racional del intervalo (0, 1) hacemos corresponder el número cero y a cada irracional, el número 1, entonces habremos definido completamente una función, en el intervalo indicado, aún cuando no hemos recurrido a ninguna fórmula.

El conjunto Z se llama dominio de variación de la variable x ó dominio de definición de la función.

En lo que sigue, con frecuencia estableceremos una función mediante una fórmula sin indicar su dominio de definición. En tales casos por dominio de definición tomaremos el conjunto de todos los números x para los cuales la fórmula tenga sentido. Por ejemplo, para $f(x) = 1/x$ el conjunto Z contiene todo $x \neq 0$.

5. Métodos de representación de las funciones. Tablas. En la práctica se requiere una representación tal de la función que permita encontrar con facilidad el valor de y que corresponde a un x dado. Para ello se emplean : 1) tablas y 2) gráficas.

Obtenemos la tabla de valores de una función escribiendo en orden con los valores de la variable x, los valores correspondientes de la variable y. Es evidente que una tabla siempre contiene un número finito de valores de x y los correspondientes valores de y. Es común que los valores de la variable x formen una progresión aritmética.

Por ejemplo, la tabla de la función

$$y=x^2+2x+3$$

* Hablando con más precisión: funciones de una variable; a diferencia de las funciones de varias variables sobre las que hablaremos más adelante.

será

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	3	3,21	3,44	3,69	3,96	4,25	4,56	4,89	5,24	5,61	6

Otro ejemplo puede ser la tabla de anotaciones de la presión barométrica en un día determinado, a intervalos iguales de tiempo, cada hora por ejemplo.

La tabla nos describe la función usualmente sólo en un cierto subconjunto del conjunto Z, y contiene un número finito de valores.

Por ejemplo, la función $y=x^2+2x+3$ está definida en todo el intervalo (0, 1) pero en la tabla sólo se muestran 11 de sus valores. La presión barométrica tiene un valor definido en cada momento, pero en la tabla solo se indican los valores de la presión cada hora, etc.

En la práctica se encuentran funciones que tienen la propiedad de que a pequeñas variaciones de la variable x correspondan, aproximadamente, valores proporcionales de la variable y. Por tanto, si los intervalos entre los valores de x, en la tabla, son suficientemente pequeños, entonces de la tabla se ve el caracter general de variación de la función también para valores intermedios, y puede aún calcularse con mayor exactitud los valores de la función para valores intermedios de x (interpolación).

Las tablas de las funciones se obtienen, ya calculando los valores de la variable mediante una fórmula (tablas matemáticas) o bien obteniendo los valores de la variable y por medio de mediciones físicas, químicas, etc. (tablas empíricas).

A la primera categoría pertenecen las tablas logarítmicas, trigonométricas, y otras semejantes; a la segunda, las tablas de elasticidad del vapor del agua comprimido, a diferentes temperaturas, las tablas que dan la temperatura de ebullición del agua en función de la presión, etc.

Finalmente procede advertir que las tablas, ya sean matemáticas o empíricas, dan los valores de la función solamente con determinada aproximación dependiente de la finalidad de la tabla; y en las tablas empíricas, dependiente además, de la exactitud que se pueda alcanzar en las mediciones.

6. Gráficas. El segundo método de representación de las funciones es el de las gráficas. Sea OXY un sistema arbitrario de coordenadas. Por gráfica de la función $y = f(x)$ se entiende el conjunto de todos los puntos de coordenadas x, $f(x)$. Así pues, por ejemplo, la gráfica de la función lineal $y = 2x + 3$ será una línea recta; la gráfica de la función

$$y = x^2$$

una parábola, etc.

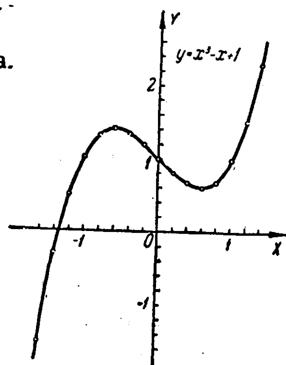


Fig. 2

Las gráficas se trazan por medio de aparatos especiales (regla, compás, elipsógrafo, etc.) o bien, con más frecuencia, en la siguiente forma.

Teniendo tabulados los valores de la función, se trazan los puntos correspondientes en el sistema OXY. Por este método se obtiene solamente un número finito de puntos de la gráfica. Si el caracter de la función no es muy complejo (ver los ejemplos anteriores) y los puntos trazados se distribuyen con suficiente proximidad, entonces, aún con esta gráfica incompleta, podemos percibir la forma de variación de la función y uniendo a mano los puntos trazados obtenemos una curva que será la gráfica de la función.

La gráfica tampoco es una representación obsolutamente exacta de la función. Las causas de ésto, en lo fundamental, son las mismas que se indicaron en la descripción de las tablas. Agreguemos a éstas la inexactitud de los instrumentos de dibujo, por efecto de la cual, cualquier curva trazada tiene un cierto grosor.

Observación. Frecuentemente al trazar una gráfica, por razones prácticas, se eligen diferentes escalas en los ejes OX y OY.

Ejemplo. Sea $f(x)=x^3-x+1$. Al construir la gráfica para $-1{,}6\leqslant x\leqslant 1{,}6$ (Fig. 2) calculamos la tabla, por ejemplo, con intervalos de 0,2. Obtenemos la siguiente tabla con exactitud hasta de un décimo (mayor exactitud de estos valores sería inútil) en nuestra gráfica:

x	−1,6	−1,4	−1,2	−1,0	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
y	−1,5	−0,3	0,5	1,0	1,3	1,4	1,3	1,2	1	0,8	0,7	0,6	0,7	1,0	1,5	2,3	3,5

Problemas

Construir las tablas y gráficas de las siguientes funciones:

1. $y=2x+3$.
2. $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.
3. $y=\frac{1}{x}$ si $x\neq 0, y=1$ si $x=0$.
4. $y=x^2-1$, $1\leqslant x\leqslant 2$; $y=x^3-1$, $0\leqslant x\leqslant 1$.
5. $y=x^3$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.
6. $y=\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 10$.

7. Funciones acotadas. Funciones monótonas. La función $y = f(x)$ definida en el conjunto Z, se dice que es acotada si existe un número $M > 0$, tal que

$$|f(x)| < M$$

para todo x del conjunto Z.

La función $y = f(x)$, definida en el intervalo (a, b), se llama:

creciente,	si la desigualdad	$x_1 < x_2$	da lugar a que	$f(x_1) < f(x_2)$,
decreciente	" " " "	$x_1 < x_2$	" " " "	$f(x_1) > f(x_2)$,
no-decreciente	" " " "	$x_1 < x_2$	" " " "	$f(x_1) \leqslant f(x_2)$,
no-creciente	" " " "	$x_1 < x_2$	" " " "	$f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

para cualquier pareja de valores x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ del intervalo (a, b).

Cada una de estas funciones se dice que es monótona. Las funciones crecientes y las funciones decrecientes se dice que son estrictamente monótonas.

En la práctica se encuentran funciones que son monótonas en todo el intervalo de su definición, o bien, este intervalo puede subdividirse en un número finito de partes en las que la función es monótona.

Sin embargo, existen funciones que no son monótonas en ningun intervalo.

EJEMPLOS.

1. La función $y = x$ es creciente en todo intervalo.
2. La función $y = \cos x$ es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
3. La función $y = E(x)$ es no-decreciente en todo intervalo.
4. La función $y = E(1/x)$ es no-creciente en el intervalo $(0, 1)$.
5. La función $y = x^2$ es decreciente en el intervalo $(-1, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, 1)$.

CAPITULO III

LIMITE DE UNA FUNCION

DEFINICION Y PROPIEDADES DE LOS LIMITES

1. Definición del límite de una función. Sea la función $y = f(x)$ definida de la vencidad* de cierto punto x_0, con exclusión, posiblemente del propio punto x_0; no hacemos, pues, ninguna suposición sobre que la función esté definida o no en el punto x_0.

Se dice que g es el límite de una función, cuando x tiende á x_0, si para toda secuencia $\{x_n\}$, convergente á x_0, con términos diferentes de x_0, la secuencia correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función converge á g; esto significa que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $(x_n \neq x_0)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Para expresar que g es el límite de una función, cuando x tiende á x_0, escribimos:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

EJEMPLOS.

1. Sea $y = x \cos 1/x$ en el intervalo $(-1, +1)$, con exclusión del punto 0, en el que la función no es definida. Tenemos aquí que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Efectivamente, si $\{x_n\}$ $(x_n \neq 0)$ es una secuencia que tiende a cero, tendremos

$$|f(x_n)| = |x_n| \left|\cos\frac{1}{x_n}\right| \leqslant |x_n| \cdot 1.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\lim\limits_{x_n\to 0} f(x_n) = 0$.

2. Sea $y = \cos\frac{1}{x}$ en el mismo conjunto del ejemplo anterior. En este caso el límite no existe en el punto cero. En efecto haciendo $x_n = \frac{1}{n\pi}$, obtenemos una secuencia que converge a cero, y la correspondiente secuencia $\{f(x_n)\}$ coincide con la secuencia divergente -1, +1, -1, +1, ...

2. Operaciones entre límites. .De la definición de límite de -- una función y de los correspondientes teoremas de la teoría de los límites de las secuencias se deducen inmediatamente los siguientes teoremas:

Sea

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = g_1 \quad u \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = g_2;$$

entonces

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2$;

---

* Se llama vecindad del punto x_0 a todo intervalo que contiene el punto x_0 en su interior.

2) $\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=g_1g_2$;

3) si m es un número real, tendremos

$$\lim_{x\to x_0}[mf_1(x)]=mg_1;$$

4) si adicionalmente suponemos que $g_2\neq 0$ u $f_2(x)\neq 0$, obtenemos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{g_1}{g_2}.$$

Ejemplo. Sea $f_1(x)=x\cos\frac{1}{x}$, $f_2(x)=1+x$ en el intervalo (-1,+1) con exclusión del punto x = 0. Como ya sabemos, $\lim_{x\to 0}f_1(x)=0$. Si $\{x_n\}$ $(x_n\neq 0)$ la secuencia converge a cero, luego la secuencia

$$\{f_2(x_n)\}=\{1+x_n\}$$

converge al límite 1 + 0 = 1. Por consiguiente

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}+1+x\right)=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\left[\left(x\cos\frac{1}{x}\right)\left(1+x\right)\right]=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{1+x}=0,$$

lo que también se comprueba de inmediato.

Demostremos, por ejemplo, el primer teorema. Tomemos una secuencia arbitraria $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$, convergente a x_0. Puesto que

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)=g_1,\quad \lim_{x\to x_0}f_2(x)=g_2,$$

entonces, en virtud de la definición de límite, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)=g_1,\quad \lim_{n\to\infty}f_2(x_n)=g_2.$$

De donde, con base en los correspondientes teoremas de la teoría de los límites de las secuencias, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}[f_1(x_n)+f_2(x_n)]=g_1+g_2.$$

Como la secuencia $\{x_n\}$ es arbitraria y satisface únicamente las condiciones indicadas antes, se tendrá

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)]=g_1+g_2.$$

3. Condición de existencia del límite. Para las aplicaciones es importante la siguiente proposición:

Teorema. Para que un número g sea el límite de una función y = f(x), cuando x tiende á x_0, es necesario y suficiente que a cada número $\varepsilon>0$ corresponda una vecindad del punto x_0, tal que los valores de la-

función para todos los puntos de dicha vecindad (con exclusión, posiblemente, del propio punto x_0) se aproximen á g con un error menor que ε.

En otras palabras, para que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

es necesario y suficiente que para valores de $x \neq x_0$, que difieran de x_0 en una cantidad lo bastante pequeña, correspondan valores de la función f(x) que difieran de g también en una cantidad suficientemente pequeña.

Este teorema puede ilustrarse de la siguiente manera. Elijamos un número arbitrario $\varepsilon > 0$ y sobre el eje OY (Fig. 3) marquemos un segmento con extremos $g-\varepsilon$, $g+\varepsilon$. Por los extremos de este segmento tracemos rectas paralelas al eje OX. De esta manera obtenemos una faja de ancho 2ε. Investiguemos ahora si existe un segmento de longitud 2δ, alojado en el eje OX y que contenga en su interior al propio punto x_0, tal que la porción de la curva que está sobre ese segmento (con exclusión quizá del punto (x_0, f (x_0)) se encuentre completamente en la faja antes mencionada.

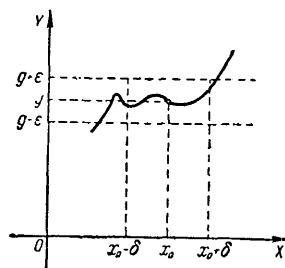


Fig. 3

Así pues, nuestro teorema afirma que:

1) si g es el límite, entonces para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse tal segmento;

2) si para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse tal segmento, entonces g es el límite.

En el caso mostrado en la Fig. 4, el número g no es el límite, ya que tomando la faja mostrada en la figura, no encontramos el correspondiente segmento 2δ. No obstante se tienen fajas para las que existe el segmento 2δ correspondiente.

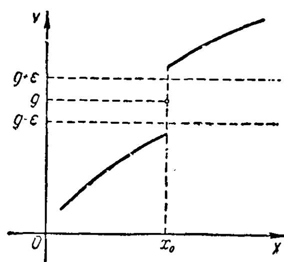


Fig. 4

Antes de pasar a la demostración de este teorema indiquemos su aplicación en algunos ejemplos.

1. $\lim_{x \to 1} (5x^2 - 7x + 6) = 4.$

Demostración. Ponemos el número $\varepsilon > 0$ en correspondencia con el intervalo $(1-\eta, 1+\eta)$, donde η es igual al menor de los dos números 1, $\frac{1}{8}\varepsilon$. Si x es un punto arbitrario de este intervalo, entonces

$$x = 1 + h,$$

donde $|h| \leq \eta$. Por consiguiente,

$$|(5x^2 - 7x + 6) - 4| = |[5(1+h)^2 - 7(1+h) + 6] - 4| = \\ = |3h + 5h^2| = |h| \cdot |3 + 5h|;$$

por cuanto

$$|h| \leqslant \eta \leqslant 1,$$

entonces

$$|(5x^2-7x+6)-4| \leqslant |h| \cdot 8.$$

Puesto que, además

$$|h| \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon,$$

entonces

$$|(5x^2-7x+6)-4| \leqslant \varepsilon.$$

Vemos que los valores de la función en el interior del intervalo $(1-\eta, 1+\eta)$ difieren de 4 en menos que ε, por consiguiente 4 es el límite de la función $5x^2-7x+6$ cuando x tiende á 1.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}$.

Demostración. Ponemos al número $\varepsilon>0$ en correspondencia con el intervalo $(2-\eta, 2+\eta)$, donde η es el menor de los dos números 1 y 5ε. Si ahora $x\neq 2$ está contenido en el intervalo $(2-\eta, 2+\eta)$, entonces $x=2+h$, donde $0<|h|\leqslant\eta$. En relación con ésto

$$f(2+h)-\frac{1}{5}=\frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{(2+h)^2+2+h-6}-\frac{1}{5}=$$
$$=\frac{h+h^2}{5h+h^2}-\frac{1}{5}=\frac{1+h}{5+h}-\frac{1}{5}=\frac{4h}{25+5h};$$

puesto que

$$|h|<1,$$

entonces

$$25+5h \geqslant 25-5|h| \geqslant 25-5\cdot 1=20,$$

por consiguiente

$$\left|f(2+h)-\frac{1}{5}\right| \leqslant \frac{4|h|}{|25+5h|} \leqslant \frac{4|h|}{20};$$

por cuanto $|h|\leqslant 5\varepsilon$, tendremos

$$\left|f(2+h)-\frac{1}{5}\right| \leqslant \frac{4\cdot 5\varepsilon}{20}=\varepsilon.$$

Así pues, 1/5 es el límite de la función dada, cuando x tiende á 2.

3. $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

Demostración. Tomemos el intervalo $(2-\eta, 2+\eta)$, donde η es un número positivo arbitrario. Si x es un punto del intervalo $(2-\eta, 2+r)$, entonces $|x-2|\leqslant\eta$. En un punto x nuestra función tiene un valor x^2. Pero

$$x^2-4=(x-2)(x+2),$$

de donde

$$|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|,$$

por consiguiente,

$$|x^2-4|\leqslant\eta(|x|+|2|)\leqslant\eta(2+\eta+2),$$

es decir

$$|x^2-4|\leqslant\eta(4+\eta).$$

La última desigualdad, es válida para todo $\eta>0$. Para los valores positivos de η, no superiores a 1, obtenemos la desigualdad

$$|x^2-4|\leqslant 5\eta.$$

Esta desigualdad demuestra que todo número positivo ε puede ponerse en correspondencia con el intervalo $(2-\eta,\ 2+\eta)$, y que si x es un punto arbitrario de este intervalo, entonces tiene lugar la desigualdad

$$|x^2-4|\leqslant\varepsilon.$$

Para ello es suficiente con elegir η menor que los números $\frac{1}{5}\varepsilon$, 1.

Pasemos ahora a la demostración de nuestro teorema. Demostremos primero que la condición dada es necesaria. Hagamos la demostración por reducción al absurdo. Admitimos, por consiguiente, que g es el límite pero que la función no satisface la condición dada, así que no para todo $\varepsilon>0$ se tiene la correspondiente vecindad. Elijamos entonces $\varepsilon>0$, para el cual no existe tal vecindad. Entonces, no importa cual sea el segmento 2δ, que contiene en su interior al punto x_0, en él siempre se encontrará cierto punto $\xi\neq x_0$, en el que el valor de la función será diferente de g en no menos que ε esto es,

$$|f(\xi)-g|\geqslant\varepsilon.$$

Elijamos ahora una secuencia arbitraria de segmentos $2\delta_1\ 2\delta_2,\ \ldots,$ que contengan en su interior al propio punto x_0, tales, sin embargo que sus longitudes tiendan a cero. Representemos por ξ_n un punto arbitrario del segmento $2\delta_n$, diferente de x_0 y que satisfaga la desigualdad

$$|f(\xi_n)-g|\geqslant\varepsilon. \tag{1}$$

En virtud de lo dicho antes, existe tal punto en cada uno de los segmentos $2\delta_n$. Como $|\xi_n-x_0|$ no excede la longitud del segmento $2\delta_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}|\xi_n-x_0|=0$$

y por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=x_0.$$

Debido a la misma desigualdad

$$|f(\xi_n)-g|\geqslant\varepsilon,$$

la secuencia $\{f(\xi_n)\}$ no tiende al límite g; lo que contradice la suposición de que la función tiene un límite g en el punto x_0.

Lo cual demuestra que la condición es necesaria.

Demostremos ahora su suficiencia. Sea que la función f (x) satisface la condición mencionada en el teorema. Sea, además $\{x_n\}$ una secuencia arbitraria que converge á x_0, siendo $x_n \neq x_0$. Demostremos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Elijamos, para el efecto, un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Según lo supuesto, existe tal vecindad del punto x_0 para la que en todo punto $\xi \neq x_0$ de esta vecindad se cumple la desigualdad

$$|f(\xi) - g| < \varepsilon. \tag{2}$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, entonces, a partir de cierto término de la secuencia (que representamos por x_N) todos los términos restantes estarán en la vecindad elegida. Así pues, para cada término x_n, subsecuente de x_N, se satisface la desigualdad (2), esto es,

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon.$$

Por cuanto ε ha sido elegida arbitrariamente, tendremos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g,$$

por consiguiente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

LIMITES UNILATERALES Y LIMITES IMPROPIOS.

4. Límite lateral. Se dice que g es el límite izquierdo de una función, cuando $x \to x_0$, si a toda secuencia $\{x_n\}$ convergente á x_0 con términos menores que x_0, la secuencia correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función tiende á g, es decir, que si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad (x_n < x_0).$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Esto se escribe así :

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = g.$$

Análogamente se define el límite derecho y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = g.$$

Ejemplo 1. Sea $f(x)=\frac{x}{|x|}$ para $x \neq 0$. En el punto x = o la función no- está definida. Es evidente que f(x) = +1 para $x>0$ y f(x) = -1 para $x<0$ (Fig. 5). Si $\{x_n\}$ es una secuencia de términos positivos, convergente a cero, entonces $f(x_n)$ = +1 para todo n, y por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +1.$$

De donde

$$\lim_{x \to +0} f(x) = +1.$$

Análogamente

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1.$$

La función tiene, pues, un límite derecho igual á +1, y un límite iz-- quierdo -1, mientras que límite $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

De la definición de límite fácilmente se deduce que si la función tiene límite, entonces existen tanto el límite derecho como el izquierdo y - que ambos son iguales al límite de la función. -- Sin embargo, de la existencia del límite derecho, por ejemplo, no es posible hacer ninguna deduc-- ción respecto al límite de la función. Otro tanto - se puede decir del límite izquierdo.

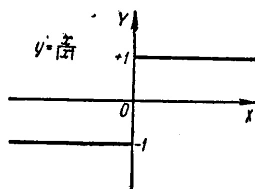


Fig. 5.

Ejemplo 2. Sea $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ para $x<0$ y $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ para $x>0$. De los ejemplos dados antes se deduce la existencia del límite izquierdo, $\lim_{x \to -0} f(x)=0$ y la no existencia del límite derecho.

Aún existiendo simultáneamente los límites izquierdo y derecho no- es posible hacer ninguna conclusión sobre la existencia del límite (ver - el ejmplo 1). Sin embargo es fácil demostrar que si ambos límites laterales existen y son iguales entre sí, entonces el límite de la función existe y es igual al valor común.

Introduciendo las modificaciones correspondientes en los teoremas- de los límites, obtenemos los teoremas de los límites laterales, izquierdo y derecho.

Por ejemplo, si

$$\lim_{x \to x_0-0} f_1(x) = g_1, \quad \lim_{x \to x_0-0} f_2(x) = g_2,$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0-0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2,$$

etc.

Para que un número g sea el límite izquierdo de - la función y = f(x), cuando x tiende á x_0, es necesario

y suficiente que a todo número $\varepsilon > 0$ pueda hacerse corresponder un intervalo tal, con el extremo derecho en el punto x_0, que el valor de la función en cada punto de este intervalo, diferente de x_0, se aproxime á g con un error menor que ε.

Una proposición semejante tiene lugar para los límites derechos.

5. Límites impropios. Se dice que una función tiende á $+\infty$ cuando $x \to x_0$, si para toda secuencia $\{x_n\}$, que converge á x_0, y cuyos términos son diferentes de x_0, la secuencia correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función tiende á $+\infty$. En otras palabras, si

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \qquad (x_n \neq x_0),$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty.$$

En tal caso, usaremos el símbolo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Similarmente definimos el límite $-\infty$, que escribiremos en la forma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Con apoyo en los teoremas correspondientes de la teoría de los límites pueden demostrarse los siguientes teoremas:

Si

1. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = a, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = +\infty,$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = +\infty.$$

2. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = a, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = +\infty,$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

3. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = a > 0, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0, \quad f_2(x) > 0$

en la vencidad del punto x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = +\infty.$$

4. $m>0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} [mf(x)] = +\infty.$$

5. Para que la función y = f(x) tienda á $+\infty$ cuando x tiende á x_0, es necesario y suficiente que a todo número $M>0$ pueda ponerse en correspondencia una vecindad tal del punto x_0, en cada punto de la cual (diferente de x_0) el valor de la función sea mayor que M.

Se definen en forma análoga los conceptos de límites infinitos izquierdo y derecho.

Sea la función y = f(x) definida para todos los valores de x, mayores que cierto número a. Se dice que la función tiende a un límite g, cuando x tiende á$+\infty$, si para toda secuencia $\{x_n\}$, que tiende á$+\infty$, la secuencia correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función, converge á g. Esto es, si

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty,$$

se concluye que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Esto lo escribimos así:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g.$$

Es fácil la interpretación de los siguientes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Similarmente con lo anterior, podemos formular el teorema:

Para que un número g sea el límite de una función y = f(x), cuando x tiende á$+\infty$, es necesario y suficiente que a todo número $\varepsilon>0$ podamos poner en correspondencia un número $M>0$, tal que para todo número mayor que M, los valores correspondientes de la función se aproximen á g con un error menor que ε.

Observación. Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = g,$$

entonces, brevemente escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g.$$

LIMITE DIFERENTE DE CERO. CALCULO DE ALGUNOS LIMITES.

6. Consecuencia de la existencia de un límite diferente de cero.

Teorema. Si la función $f(x)$ tiene un límite g positivo, cuando x tiende á x_0, ó si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, entonces existe cierto número $\alpha > 0$, tal que en todo punto $x \neq x_0$ de alguna vecindad del punto x_0 satisface las desigualdades $f(x) > \alpha > 0$.

Efectivamente, para los valores de x, suficientemente próximos á x_0 tenemos, en el primer caso, la desigualdad

$$|f(x) - g| < \frac{g}{2},$$

por tanto

$$-\frac{g}{2} < f(x) - g,$$

por consiguiente,

$$f(x) > \frac{g}{2} = \alpha > 0.$$

En el segundo caso, eligiendo un número $M > 0$, arbitrario, tendremos la desigualdad

$$f(x) > M = \alpha > 0.$$

Un teorema semejante tiene lugar para un g negativo, o para

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

así como para los límites unilaterales.

7. Cálculo de algunos límites.

a)

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1 \quad (a > 0);$$

b)

$$\lim_{r\to+\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^r=e;$$

c)

$$\lim_{h\to 0}\sin h=0,\quad \lim_{h\to 0}\cos h=1,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1.$$

a) Supongamos inicialmente, que $a\geqslant 1$. Sea que la secuencia $\{h_n\}$ satisface las condiciones

$$\lim_{\to\infty} h_n=0,\quad h_n\neq 0. \tag{1}$$

Hagamos

$$\alpha_n=E\left(\frac{1}{|h_n|}\right)^{*)},$$

por consiguiente, α_n es un número entero no-negativo, que satisface las desigualdades

$$\alpha_n\leqslant\frac{1}{|h_n|}<\alpha_n+1. \tag{2}$$

De la condición (1) y de las desigualdades (2) se desprende que

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty. \tag{3}$$

Por tanto, a partir de cierto n, el número α_n es positivo. En la siguiente exposición consideramos que todo $\alpha_n>0$; esto puede hacerse ya que no consideramos solamente un número finito de términos.

Si $h_n>0$, entonces de acuerdo con (2) y con la suposición que $a\geqslant 1$ tendremos

$$a^{h_n}\leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

y como es evidente que

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}}\leqslant 1\leqslant a^{h_n},$$

tienen lugar las desigualdades

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}}\leqslant a^{h_n}\leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}}. \tag{4}$$

Estas desigualdades son válidas también para $h_n<0$, ya que entonces $(-h_n)>0$ y por consiguiente en virtud de (4), se tiene

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}}\leqslant a^{-h_n}\leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

---

* Ver Pág. 6

es decir,

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} \leqslant \frac{1}{a^{h_n}} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

y al tomar la inversa de estas cantidades obtenemos nuevamente las desigualdades (4).

Como ya se ha visto (ver Pág. 29),

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\alpha_n}} = 1.$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\alpha_n}}} = 1,$$

por consiguiente, de las desigualdades (4) y en base de un teorema conocido (Pág. 26) obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} a^{h_n} = 1,$$

de donde

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1.$$

Así pues, hemos demostrado que si $a \geqslant 1$, entonces

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1.$$

Si ahora $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a} > 1$, por tanto

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^h = 1.$$

Pero

$$a^h = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^h},$$

por consiguiente

$$\lim_{h\to 0} a^h = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^h} = 1.$$

La proposición a) ha sido demostrada.

b) Ya habíamos demostrado (Pág. 32) que si la secuencia $\{r_n\}$ satisface las condiciones

$$r_n \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} |r_n| = +\infty,$$

entonces la secuencia $\left\{\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n}\right\}$ converge a un límite determinado que representamos por e. En particular, para

$$r_n \neq 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$$

se tiene siempre:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n}=e,$$

así que, según la definición del límite de una función

$$\lim_{r\to+\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)=e^{*}).$$

c) Dibujemos una circunferencia de radio $OB=1$ (Fig. 6) y tracemos un diámetro cualquiera EB. Sea la recta BD tangente a la circunferencia en el punto B, y BC = h un arco cualquiera de la circunferencia. Representando por A la proyección del punto C sobre OB, y por D el punto de intersección de la recta OC con la tangente antes mencionada, obtenemos, en virtud de las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$AC=|\sin h|,$$
$$OA=|\cos h|,$$
$$BD=|\operatorname{tg} h|.$$

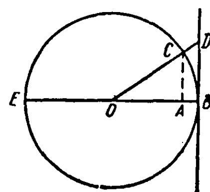


Fig. 6

Si $-\frac{\pi}{2}<h<\frac{\pi}{2}$, entonces como fácilmente se ve en la Fig. 6

$$|\sin h|\leqslant|h|, \qquad (4)$$

$$|\cos h|\geqslant 1-|\sin h|. \qquad (5)$$

Obtenemos la primera desigualdad al observar que el arco BC es mayor que la cuerda BC, la que a su vez es mayor que AC. La segunda desigualdad se obtiene del triángulo OCA al aplicar el teorema según el cual un lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos lados.

De la desigualdad (4) con facilidad obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\sin h=0.$$

De la desigualdad (5) y observando que $\cos h\leqslant 1$, obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\cos h=1.$$

De la Fig. 6 encontramos las siguientes desigualdades:

área $\triangle OAC\leqslant$ área del sector $OBC\leqslant$ área $\triangle OBD$,

esto es,

$$\frac{1}{2}\cos h\,|\sin h|\leqslant\frac{1}{2}\,|h|\leqslant\frac{1}{2}\,|\operatorname{tg} h|,$$

---

* Es fácil demostrar que $\lim_{|r|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}=e$

(ver el teorema de la Pág 32).

de donde, tomando en cuenta que

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{|\sin h|}{|h|},$$

si $-\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$\cos h \leqslant \frac{h}{\sin h} \leqslant \frac{1}{\cos h},$$

por consiguiente,

$$\frac{1}{\cos h} \geqslant \frac{\sin h}{h} \geqslant \cos h,$$

y como

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1 \text{ и } \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h} = 1,$$

entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Problemas.

Demostrar que:

1.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

2. $\lim_{x \to 0} a^{\sin x} = 1, \qquad a > 0.$

3. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = 1.$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k.$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = 0.$

6. $\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{|x|} = +1, \quad \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{|x|} = -1.$

7. $\lim_{x \to \infty} \sin x$ no existe.

8. $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}.$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1}=\frac{5}{4}$ (dividir el numerador y el denominador entre - x-1)

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+8x-1}{x^5-1000x}=0.$

11. $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=0.$

CAPITULO IV

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

DEFINICION Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

1. Definición. Sea una función y = f (x) definida en la vecindad de un punto x_0. Se dice que la función y = f (x) es continua en el punto $x=x_0$, si $\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

En otras palabras: la función f (x), definida en la vecindad de un punto x_0, es continua en ese punto, si

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h)=f(x_0).$$

Similarmente a como se definieron los límites izquierdo y derecho puede definirse la continuidad derecha ó la izquierda, a saber: una función f (x), definida en un punto x_0, y también en un intervalo con el extremo derecho en el punto x_0, es continua a la izquierda en el punto x_0, si

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)=f(x_0), \quad \text{o} \quad \lim_{h \to -0} f(x_0+h)=f(x_0).$$

De la misma manera se define la continuidad a la derecha.

Observación. Al abordar el concepto de límite fué indiferente si la función era o nó definida en el punto $x=x_0$. Para la continuidad de la función en un punto x_0 es necesario que esté definida en ese punto.

Como fácilmente se observa, si la función f (x) es continua en un punto x_0, entonces es continua en este punto, a la derecha y a la izquierda.

La recíproca también es verdadera.

Ejemplos.
1. La función $y=x^2$ es continua para todos los valores de x.

ya que $\lim_{x \to x_0} x^2=x_0^2$.

2. La función $y=3x^2-2x+3$ también es continua donde quiera.

3. La función y = E (x) es continua donde quiera, excepto para los valores enteros de la variable x. En éstos la función es continua solamente a la derecha.

4. La función

$$y=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

no es continua en el punto x = 0, porque si se toma la secuencia $\{x_n\}$, donde $x_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, entonces la secuencia de los correspondientes valores de la función: 1, 1, -1, 1, ... es divergente.

Se dice que la función f (x), definida en un intervalo cerrado (a, b,), es continua en este intervalo, si es continua en cada uno de los puntos interiores de este intervalo, si es continua en un intervalo cerrado.

2. Condición Necesaria y Suficiente para la Continuidad de una Función. Sobre la base de los teoremas correspondientes de la teoría de los límites es posible formular la siguiente proposición:

Teorema. Para que una función f (x), definida en la vecindad de un punto x_0, sea continua en ese punto es necesario y suficiente que a los valores de x, cuya diferencia con x_0, sea lo suficientemente pequeña, correspondan valores de la función que difieran de $f(x_0)$, en una cantidad suficientemente pequeña, es decir, en otras palabras, que para todo número $\varepsilon > 0$ puede encontrarse tal vecindad del punto x_0, que los valores de la función, en cualquier punto de esta vecindad, difieren del valor de la función para $x = x_0$ en menos que ε.

Un teorema similar tiene lugar para la continuidad a la izquierda y a la derecha.

3. Interpretación Geométrica. El concepto de continuidad puede ilustrarse similarmente al concepto de límite.

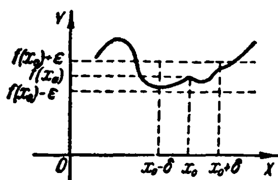


Fig. 7

Para investigar si una función es continua en un punto x_0, elegimos un número $\varepsilon > 0$, arbitrario y trazamos dos rectas paralelas al eje OX, una a la altura $f(x_0)+\varepsilon$, la otra a la altura $f(x_0)-\varepsilon$. Obtenemos una faja de ancho 2ε (Fig. 7). Investiguemos ahora si existe un segmento del eje OX, que contenga en su interior al punto x_0 y de longitud 2δ, tal que la parte de la curva correspondiente a este segmento se encuentre completamente en la faja antes mencionada.

Así pues, si la función es continua, siempre es posible encontrar tal segmento para una elección arbitraria del número $\varepsilon > 0$, entonces la función es contínua en el punto x_0.

4. Operaciones Entre Funciones Continuas. De la definición de continuidad y de los correspondientes teoremas de la teoría de los límites fácilmente obtenemos la siguiente proposición:

Teorema. La suma, la diferencia y el producto de dos funciones, continuas en cierto punto, también es una

función continua en ese punto; el cociente es continuo también, cuando la función entre la que se divide es diferente de cero en ese punto y en su vecindad.

Ejemplos.

1. como la función y = x es continua donde quiera, entonces las funciones $x^2 = x \cdot x, x^3 = x \cdot x \cdot x, \ldots, x^n$(n, un número natural) son funciones continuas.

2. La función ax^n (n, un número natural; a,un número real) es continua donde quiera, ya que puede considerarse como el producto de la función x^n y la función constante de valor a, evidentemente continua.

3. El polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ es una función continua donde quiera.

4. Una función racional, esto es, una función igual al cociente de dos polinomios, es continua en todos los puntos en que está definida.

5. Consecuencia de la Continuidad de una Función Diferente de Cero, en un Punto Dado. Del teorema (Pág. 49) se desprende la siguiente proposición:

Teorema. Si la función f (x) es continua en un punto x_0 y si $f(x_0) > 0$, , entonces existe tal número $\alpha > 0$, que en cierta vecindad del punto x_0 tendremos $f(x) > \alpha > 0$.

Una proposición semejante es válida para $f(x) < 0$, y también para las funciones de continuidad unilateral.

CONTINUIDAD UNIFORME

6. Definición. Se dice que una función f (x) , definida en el intervalo (a, b,) es uniformemente continua en este intervalo, si para un número arbitrario $\varepsilon > 0$ puede dividirse el intervalo (a, b,) en un número finito de segmentos tal que los valores de la función en dos puntos arbitrarios de un mismo segmento, difieran entre sí en menos que ε.

7. Interpretación Geométrica. La definición de continuidad uniforme puede interpretarse geométricamente, de la siguiente manera.

Para comprobar si la función es uniformemente continua, elegimos un número $\varepsilon > 0$, arbitrario e investiguemos si es posible dividir el intervalo (a, b,) en un número finito de segmentos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ tal que cada parte de la curva, correspondiente a cualesquiera de los segmentos, pueda estar encerrada en un rectángulo de altura ε y de base igual a la longitud del segmento correspondiente. (Fig. 8). Si esta operación puede hacerse para cualquier $\varepsilon > 0$,la función será uniformemente continua.

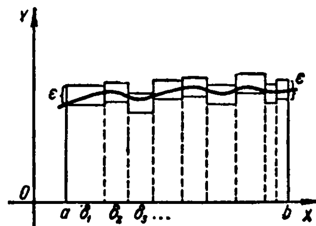


Fig. 8

8. Continuidad Uniforme de una Función Continua. Representemos por η la longitud del menor de los segmentos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$. Es claro que si la distancia entre dos puntos cualquiera x_1 y x_2 es menor que η, entonces o ambos están en uno de los segmentos $\delta_1, \delta_2, \ldots$ o se encuentran en dos segmentos consecutivos. En el primer caso los valores de la función en estos puntos difieren entre sí en menos que ε; y en el segundo caso los valores de la función en esos puntos difieren en menos que ε del valor de la función en el extremo común de los segmentos consecutivos, que contienen a los puntos x_1 y x_2, y por consiguiente,

$$|f(x_2)-f(x_1)|<2\varepsilon.$$

Así pues, en ambos casos, podemos afirmar que en dos puntos cualesquiera cuya distancia entre sí sea menos que η, los valores de la función difieren entre sí en menos que 2ε.

Observemos, además que si x_0 es un punto arbitrario del interior del intervalo (a, b,) entonces existe un segmento de longitud menor que η, que contiene al punto x_0. En virtud de lo dicho anteriormente, los valores de la función en cada punto de este segmento difieren de $f(x_0)$, en menos que 2ε. Por cuanto 2ε es un número positivo arbitrario (ya que ε es un número positivo arbitrario) la función será continua en un punto $x= x_0$.

Observaciones semejantes pueden hacerse respecto a los números a y b (si pertenecen al segmento.)

Teorema. Una función, uniformemente continua en el intervalo (a, b,) es continua en todos los puntos interiores de este intervalo y en los puntos a y b, si dichos puntos pertenecen al intervalo; la función es continua, respectivamente, a la derecha y a la izquierda.

Ejemplos.

1. La función $y=x^2$ es uniformemente continua en el intervalo [0, 1]. Para demostrarlo tomemos un número $\varepsilon>0$ arbitrario y consideremos dos puntos arbitrarios x y x + h del intervalo [0, 1].. En estos puntos la función tiene dos valores, x^2 y $(x+h)^2$, respectivamente tenemos:

$$|(x+h)^2-x^2|=|2xh+h^2|=|h|\cdot|2x+h|=|h|\cdot|x+x+h|.$$

como $0\leqslant x\leqslant 1$ y $0\leqslant x+h\leqslant 1$, entonces

$$|(x+h)^2-x^2|\leqslant 2|h|;$$

Haciendo $|h|<\frac{\varepsilon}{2}$, obtenemos:

$$|(x+h)^2-x^2|<\varepsilon.$$

Así pues, si dividimos el intervalo [0, 1] en un número finito de segmentos de longitud menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, los valores de la función serán, en dos puntos cualesquiera de cada uno de los segmentos, diferentes entre sí, una cantidad menor que ε.

Por cuanto ε es un número positivo arbitrario, la función será uniformemente continua en el intervalo [0, 1].

2. La función $y=\frac{2x+1}{3x+1}$ es uniformemente continua en el intervalo [0, 2].

Procediendo como en el ejemplo anterior, obtenemos:

$$\left|\frac{2(x+h)+1}{3(x+h)+1}-\frac{2x+1}{3x+1}\right|=\frac{|h|}{|[3(x+h)+1](3x+1)|}.$$

Cómo $0\leqslant x+h\leqslant 2$, $0\leqslant x\leqslant 2$, entonces

$$|3(x+h)+1|\geqslant 1,$$
$$|3x+1|\geqslant 1,$$

de donde

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|h|.$$

por consiguiente, si $|h|<\varepsilon$, entonces

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon.$$

De suerte que si dividimos el intervalo [0, 2] en segmentos de longitud menor que ε, entonces los valores de la función en dos puntos cualesquiera de cada segmento diferirán entre sí en menos que ε. (si, por ejemplo, $\varepsilon=0{,}1$, entonces es suficiente con dividir el intervalc [0, 2] en 21 partes iguales).

3. La función $y=\cos\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en el intervalo (0, 1)

Efectivamente, en caso contrario puede ser que al dividir el intervalo (a, b,) es un número finito de segmentos, que los valores de la función en puntos cualesquiera de cada segmento difieran entre sí en menos que $\varepsilon=1$. Puede, además , tomarse tal número n, para el que los puntos $\frac{1}{n\pi}$ y $\frac{1}{(n+1)\pi}$ estén dentro del primero de estos segmentos. Sin embargo es fácil ver que los correspondientes valores de la función en estos puntos difieren en 2, es decir, en más que $\varepsilon=1$. Así pùes, suponiendo que la función es uniformemente continua, caemos en contradicción.

PROBLEMAS

Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

1. $y = x$ en el intervalo (1, 2).

2. $y=2x^2-3x$ en el intervalo (1, 3).

3. $y=\frac{x}{1+x}$ en el intervalo (0, 5).

9. Teoremas Fundamentales sobre las Funciones Continuas en un Intervalo Cerrado. Expongamos ahora (sin demostración) algunos teoremas fundamentales sobre las funciones continuas en un intervalo cerrado.

Teorema. Una función, continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, es uniformemente continua en ese intervalo.

Teorema. Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es acotada en ese intervalo.

Teorema. Si una función continua en el intervalo $[a, b]$, es positiva en un extremo en este intervalo y negativa en el otro, entonces en el interior del intervalo (a, b), existe por lo menos un punto en el que la función se anula.

Ejemplos.

1. Todo polinomio de grado impar

$$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\dots+a_{2n}x+a_{2n+1} \quad (a_0\neq 0)$$

tiene por lo menos una raíz real. Para demostrarlo, reescribamos nuestro polinomio en la siguiente forma

$$f(x)=x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots+\frac{a_{2n}}{x^{2n}}+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$$

y aceptemos, por ejemplo, que $a_0>0$. La expresión dentro del paréntesis tiene, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, un límite igual a a_0. Por consiguiente, existe un número $M>0$, tal que para $|x|>M$ la expresión del paréntesis es positiva (ver Pág. 49). De donde se deduce que

$$f(M+1)>0, \text{ y } f(-M-1)<0.$$

Como la función f (x) es continua, existirá en el intervalo (-M -1, M+1), un punto por lo menos en el que f (x) = 0.

2. La ecuación y = cos x tiene, por lo menos, una raíz en el intervalo de $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Efectivamente, la función continua f (x) = x - cos x * tiene en el punto x = 0 un valor $-1<0$, y en el punto $x=\frac{\pi}{2}$ un valor $\frac{\pi}{2}>0$.

Teorema. Si la función f(x) es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces en este intervalo existe, por lo menos un punto en el que la función alcanza un valor máximo y otro punto y por lo menos en el que la función tiene un valor mínimo.

En otras palabras en un intervalo $[a, b]$ existen dos puntos x_1 y x_2, tales que

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

para todo x de $[a, b]$

Teorema. Una función, continua en un intervalo cerrado (a, b,) tiene en este intervalo todos los valores comprendidos entre sus valores máximo y mínimo.

Ejemplos.

3. La función y = sen x ** adquiere, en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ todos los valores comprendidos entre 0 y 1, lo que geométricamente es evidente (ver la Fig. 13).

4. Una función f (x), continua en el intervalo (a, b,) y que posee en diferentes puntos del intervalo valores diferentes, es estrictamente monótona en este intervalo.

Efectivamente, en caso contrario, en el intervalo (a, b,) existirían números α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$, ,tales que el número $f(\beta)$ no estuviera entre $f(\alpha)$ y $f(\gamma)$. Sea por ejemplo $f(\gamma)>f(\alpha)>f(\beta)$. De acuerdo con nuestro teorema en el intervalo (β, γ) existe un punto θ, en el que la función f (x) adquiere un valor $f(\alpha)$. Además $\theta\neq\alpha$, así que α no pertenece al intervalo (β, γ). Tenemos, por consiguiente, $f(\theta)=f(\alpha)$, para $\theta\neq\alpha$, lo que contradice la suposición. Por consiguiente, la función es monótona.

FUNCIONES COMPUESTAS

10. Definición. Ocurre a menudo que tres variables dadas x, y, u, estén relacionadas entre sí de manera que *y* es una función de u y u una fun-

---

* La continuidad de las funciones y = sen x, y *y* = cos x se demostrará después. (ver Pág. 66)

** Ver la nota anterior.

ción de x, esto es

$$x=f(u) \quad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta),$$
$$u=\varphi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Si los valores adquiridos por la función $\varphi(x)$, están contenidos en el intervalo $[\alpha, \beta]$, entonces la variable y puede considerarse dependiente de la variable x, ya que a cada valor x del intervalo (a, b,) corresponde un valor determinado de la variable u, contenido en el intervalo $[\alpha, \beta]$; a ésta última corresponde un valor determinado de la variable y; así pues; a cada valor de la variable x del intervalo (a, b) corresponde un valor definido de la variable y. En este caso se dice que la variable y es una función compuesta de la variable x a través de la variable u. Esta función se representa por medio del símbolo $f(\varphi(x))$, y la dependencia funcional se escribe en la forma

$$y=f(\varphi(x)).$$

Ejemplo.

$$y=u^2, \quad u=x^2-3x, \qquad y=(x^2-3x)^2.$$

11. Continuidad de una Función Compuesta. Sobre las funciones compuestas podemos enunciar el siguiente

Teorema. Si la función $y=f(u)$ es continua en $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, y la función $u=\varphi(x)$ es continua para $a \leqslant x \leqslant b$ y se satisfacen las desigualdades $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta$, entonces la función compuesta $y=f(\varphi(x))$ es continua para todos los valores de x del intervalo

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Demostración. Para la demostración del teorema observemos que si la secuencia $\{x_n\}$ tiende a un valor definido x, entonces la correspondiente secuencia $\{y_n\}=\{f(\varphi(x_n))\}$ tiende a $f(\varphi(x))$. En efecto, en virtud de la continuidad de la función $\varphi(x)$ la secuencia $\{\varphi(x_n)\}=\{u_n\}$ tiende a $u=\varphi(x)$; y a causa de la continuidad de la función $f(u)$, la secuencia $\{y_n\}=\{f(u_n)\}$ tiende a $y=f(u)=f(\varphi(x))$.

FUNCIONES INVERSAS

12. Definición. Sea dada la función y = f (x), continua y estrictamente monótona en un intervalo (a, b,). Hagamos $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. En virtud de la continuidad de la función, la variable y toma todos los valores contenidos entre α y β. Y sobre todo, ya que, la función es estrictamente monótona, entonces todo valor de la variable y del intervalo corresponde a uno y solamente a uno de los valores de la variable x del intervalo $[a, b]$.

Luego la variable x puede considerarse como una función de la variable y definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Representando esta función por el símbolo $\varphi(y)$, podemos escribir:

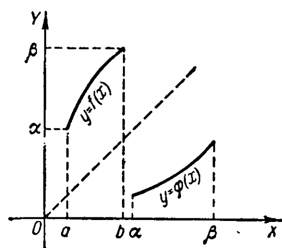


Fig. 9

$$x = \varphi(y).$$

La función $x = \varphi(y)$ se llama función inversa de la función $y = f(x)$.

13. Interpretación Geométrica. Obtenemos la gráfica de la función $y = \varphi(x)$ de la siguiente manera. Giramos la bisectriz del ángulo $\angle(+x, +y)$ (Fig. 9); la nueva posición de la gráfica de la función $y = f(x)$ dará la gráfica de la función $y = \varphi(x)$.

14. Continuidad de una Función Inversa.

Teorema. La función inversa de una función continua y estrictamente monótona también es continua y estrictamente monótona.

Demostración. Admitamos, para concretar, que la función f (x) es creciente. Ahora, si la función $x = \varphi(y)$ no fuera estrictamente creciente se tendrían dos pares de valores correspondientes (x_1, y_1), (x_2, y_2), que satisfarían las desigualdades

$$x_1 < x_2,$$
$$y_1 \geqslant y_2,$$

lo que contradice la suposición de que la función f (x) es estrictamente creciente. Se procede análogamente en el caso de que la función sea estrictamente decreciente.

Para la demostración de la continuidad de la función $x = \varphi(y)$ en un punto arbitrario $y = y_0 (\alpha < y_0 < \beta)$ procedamos de la siguiente manera.

Sea un número arbitrario positivo ε. Hagamos $x_0 = \varphi(y_0)$ y tomemos dos números arbitrarios x_1 y x_2, tales que:

1) $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$;

2) $0 < x_2 - x_1 < \varepsilon$.

Haciendo ahora $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ observamos que para todo y, comprendido entre y_1 y y_2, el correspondiente valor de x esta comprendido entre x_1 y x_2 y por consiguiente, difiere de x_0 en menos que ε. Así pues, la función $x = \varphi(y)$ es continua, para $y = y_0$. De manera semejante se demuestra la continuidad para $y = \alpha$ y $y = \beta$.

CONTINUIDAD Y GRAFICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

15. Función Potencial $y=x^n$.

1. n es un número natural. En este caso la fórmula antes mencionada define la función para todos los valores x. Esta función es continua para todos los valores de la variable x, ya que, como se desprende del teorema sobre el límite del producto de secuencias, si

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} x_k^n = x^n.$$

En la figura 10 se muestran las gráficas de las funciones $y=x^2$ y $y=x^3$.

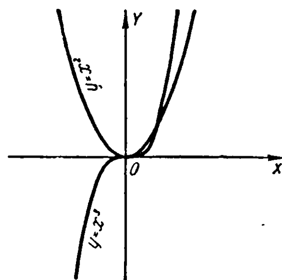


Fig. 10

2. n = 0, bajo la condición de que y = 1, para x = 0. La fórmula $y=x^n$ define entonces la función que para todos los valores de x adquiere el valor 1. Por consiguiente, esta función es continua.

3. n es un número entero negativo. Haciendo $n=-r$ $(r>0)$ observamos que nuestra función tiene la forma $y=\frac{1}{x^r}$, y como el cociente de dos funciones continuas y definidas donde quiera $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=x^r$, es una función -- continua, y definida donde quiera, salvo en x = 0.

4. n es el recíproco de un número entero, Haciendo n = 1/r (r, es un número (entero), tenemos $y=\sqrt[r]{x}$ (tomemos en consideración solamente la -- raíz no negativa). La función es definida para todo $x>0$; si r es un número impar, entonces la fórmula anterior define una función para todo $x<0$. Cuando x = 0 la función está definida únicamente para el caso en que r sea un número positivo; la función adquiere entonces el valor cero.

La continuidad se demuestra de la siguiente manera: cuando r es un - número positivo par, la función inversa $x=y^r$ será estrictamente creciente y definida para todo $y\geqslant 0$, , por lo que en virtud del teorema sobre las -- funciones inversas se infiere la continuidad de la función $y=\sqrt[r]{x}$ para $x\geqslant 0$. De manera análoga procederemos cuando r sea un número positivo impar. En este caso, la función $x=y^r$ es estrictamente creciente y -- continua para todos los valores de y, por consiguiente la función $y=\sqrt[r]{x}$ también es continua para todos los valores de x. En el caso de un número r entero negativo es fácil demostrar la continuidad para todo $\sqrt[r]{x}$ para el que exista, si observamos que

$$\sqrt[r]{x}=\frac{1}{\sqrt[-r]{x}}$$

5. n es un número racional. Haciendo n = p/q (p y q, enteros), vemos que la función es definida para todo $x>0$. Cuando $n>0$, la función tam--

bién será definida para x = 0, adquiriendo el valor cero.

La función $y=x^{p/q}$ puede considerarse como una función formada por las funciones

$$y=u^p,$$
$$u=x^{\frac{1}{q}}.$$

Como ambas funciones son continuas para aquellos valores para los cuales son definidas, entonces en virtud del teorema sobre las funciones compuestas, la función $y=x^{p/q}$ también es continua para aquellos valores en los que es definida.

6. n es un número irracional. En este caso la función es definida para todo $x>0$. Para x = 0 la fórmula $y=x^n$ solo tiene sentido cuando $n>0$; entonces tenemos y = 0.

La función es continua para todos los valores de x para los que es definida por la fórmula $y=x^n$.

Efectivamente, tomando un número a positivo, diferente de la unidad obtenemos para $x>0$: $y=a^{n\log_a x}$, así que $y=a^u$, donde $u=n\log_a x$.

Pero, como se demostrará después (ver Parrs. 16 y 17) la función a^u es continua para todo u, y la función $\log_a x$ también es continua para todo $x>0$, por consiguiente, en virtud del teorema sobre la continuidad de una función compuesta (ver Pág. 62), la función $y=x^n$ es continua para todo $x>0$.

Si $n>0$, puede demostrarse que la función $y=x^n$ es continua a la derecha si el punto x = 0, esto es, que $\lim\limits_{x\to+0} x^n=0$. Para ello tomemos un número racional r, arbitrario que satisfaga la condición $0<r<n$. Para $0\leqslant x\leqslant 1$ tenemos $0\leqslant x^n\leqslant x^r$. Es sabido que la función x^r es continua a la derecha para x = 0, es decir $\lim\limits_{x\to+0} x^r=0$. En virtud de la última desigualdad, ocurre lo mismo para la función, $y=x^n$.

Resumiendo todo lo expresado podemos afirmar que la función $y=x^n$ es continua para todos los valores de x, para los que sea definida.

Ejemplo.

Las funciones

$$\sqrt[3]{x^5},\quad \sqrt{x^2+8x-9}$$

etc., son continuas para todos los puntos en los que dichas funciones son definidas. En general cada grado del polinomio es una función continua en todos los puntos en los que es definido.

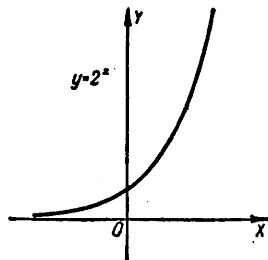


Fig. 11

16. La función exponencial $y=a^x$.

La continuidad de la función $y=a^x$, $a>0$, se demuestra fácilmen-

te, en la siguiente forma. Sea x_0 un valor arbitrario de la variable x. Por un teorema conocido, tenemos:

$$\lim_{h\to 0} a^{x_0+h} = \lim_{h\to 0}(a^{x_0}\cdot a^h) = a^{x_0}\lim_{h\to 0} a^h.$$

Pero, como se demostró (Pág. 49): $\lim_{h\to 0} a^h = 1$, así que

$$\lim_{h\to 0} a^{x_0+h} = a^{x_0}.$$

De suerte que el límite de la función existe para cada valor de x y es igual al valor de la función en el punto x. Por consiguiente, la función espotencial es continua para todos los valores de x. En la Fig. 11 se muestra la gráfica de la función $y=2^x$.

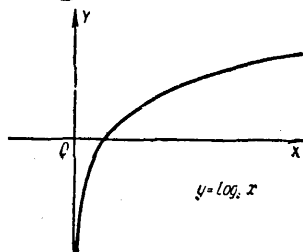


Fig. 12

17. La función Logarítmica $y=\log_a x$. La función $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$, es definida solamente cuando $x>0$. Como la función inversa $x=a^y$ es estrictamente monótona y continua, entonces (ver Pág. 63) la función $y=\log_a x$ es continua para todos los valores positivos de x.

La gráfica de la función $y=\log_2 x$ se muestra en la Fig. 12.

18 Funciones Trigonométricas $y=\sin x$, $y=\cos x$.

Sea x_0 un valor cualquiera, pero fijo, de la variable x. Entonces visto que

$$\lim_{h\to 0}\sin h = 0, \quad \lim_{h\to 0}\cos h = 1$$

(Pág. 49), obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\sin(x_0+h) = \lim_{h\to 0}(\sin x_0\cos h + \cos x_0\sin h) = \sin x_0,$$

$$\lim_{h\to 0}\cos(x_0+h) = \lim_{h\to 0}(\cos x_0\cos h - \sin x_0\sin h) = \cos x_0.$$

Por consiguiente, las funciones y = sen x (Fig. 13), y = cos x (Fig. 14) son continuas para todos los valores de x.

y = tg x (Fig. 15).

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, entonces, esta función es definida y continua para todos los valores de x, para los cuales $\cos x \neq 0$. Los valores excluidos son:

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \ \pm\frac{3\pi}{2}, \ \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots,$$

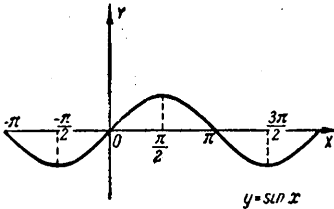


Fig. 13

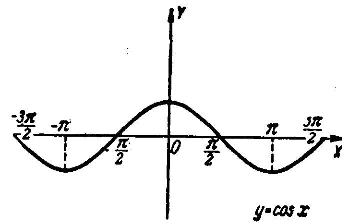


Fig. 14

en general $x=\pm\frac{(2n-1)\pi}{2}$, donde n es un número natural.

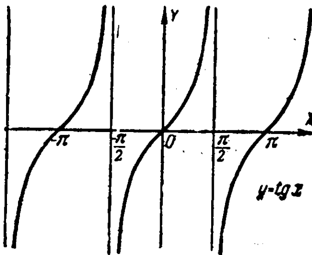


Fig. 15

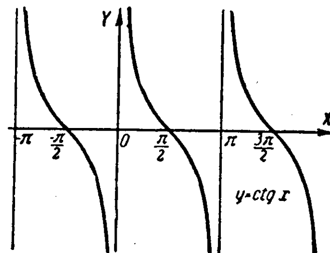


Fig. 16

y = ctg x (Fig. 16).

Como $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, esta función es continua y definida para todos los valores de x para los cuales $\sin x\neq 0$. Los valores que se excluyen son

$$x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \dots ,$$

ó, en general $x=\pm n\pi$, donde n = 0, 1, 2, ...
y = sec x (Fig. 17).

Como $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, esta función es definida y continua para todos los valores de x, para los cuales $\cos x\neq 0$.

y = cosec x (Fig. 18).

Como $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$, entonces esta función es definida y continua para todos los valores de x, en los que $\sin x\neq 0$.

19. Funciones Trigonométricas Inversas.
y = arc sen x (Fig. 19).

Esta función es definida en el intervalo $(-1, +1)$, en la siguiente forma:

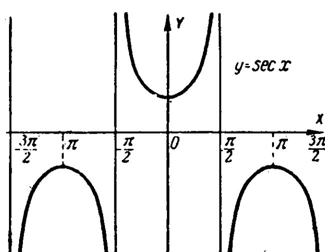


Fig. 17

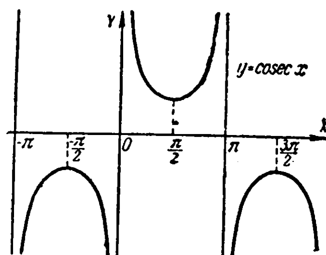


Fig. 18

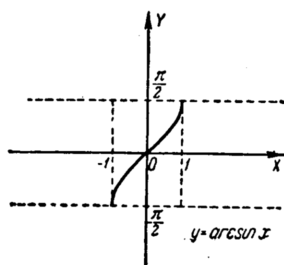


Fig. 19

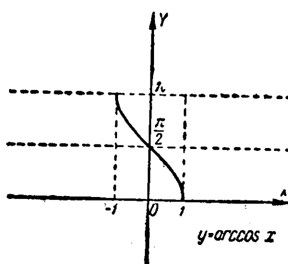


Fig. 20

arcsen x es el ángulo y comprendido en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ y satisface la ecuación x = sen y. Es fácil ver que solamente existe un ángulo que satisface las dos condiciones mencionadas.

Así pues la función definida y = arcsen x es la función inversa de la función x = sen y para $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. . Como en este intervalo la función x = sen y es estrictamente creciente y continua, entonces y = arc sen x es una función estrictamente creciente y continua.

y = arc cos x (Fig. 20).

Esta función al igual que la anterior es definida para $-1 \leq x \leq 1$ de la siguiente manera: arc cos x es el ángulo y que satisface la desigualdad $0 \leq y \leq \pi$ y a la ecuación x = cos y. Existe solamente un ángulo que satisface ambas condiciones. Así pues, la función y = arc cos x es la función inversa de x = cos y, en la suposición que $0 \leq y \leq \pi$. Como en este intervalo la función x = cos y es continua y estrictamente decreciente, entonces la función y = arc cos x es continua y estrictamente decreciente.

y = arc tg x (Fig. 21).

Definimos esta función para todos los valores de x, en la siguiente forma: arc tg x es el ángulo y que satisface las desigualdades $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ y la ecuación tg y = x. Así pues, la función y = arc tg x es la función inversa de

x = tg y en la suposición que $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ En este intervalo $x=\text{tg}\,y$ es estrictamente creciente y continua, por consiguiente la función y = arc tg x es también continua y estrictamente creciente.

y = arc ctg x (Fig. 22).

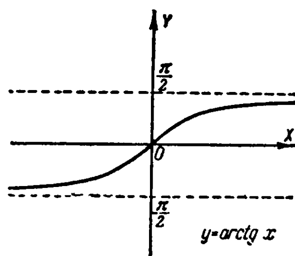


Fig. 21

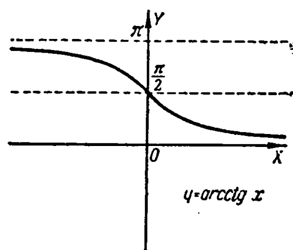


Fig. 22

Definimos esta función para todos los valores de x en la siguiente forma arc ctg x es el ángulo y que satisface las desigualdades $0<y<\pi$ y la ecuación ctg y = x. Por consiguiente, la función y = arc ctg x es la función inversa de x = ctg y para $0<y<\pi$. Como en este intervalo x = ctg y es estrictamente decreciente y continua entonces la función y = arc ctg x también es estrictamente decreciente y continua.

y = arc sec x (Fig. 23).

Definimos esta función para todos los valores de x que satisfacen la condición $|x|\geqslant 1$, de la siguiente manera: arc sec x es el ángulo y que satisface las desigualdades $0\leqslant y\leqslant\pi$ y la ecuación x = sec y. Por consiguiente, para $x\geqslant 1$ la función y = arc sec x es la función inversa de x=sec y en la suposición que $0\leqslant y<\frac{\pi}{2}$. Como en este intervalo la función x = sec y es estrictamente creciente y continua (excepto para $y=\frac{\pi}{2}$), entonces la función y = arc sen x es estrictamente creciente y continua para $x\geqslant 1$.

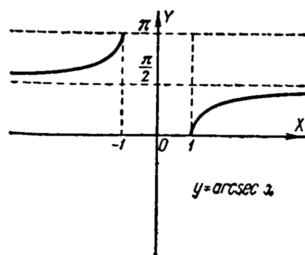


Fig. 23

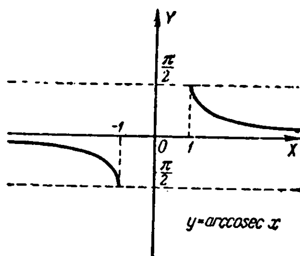


Fig. 24

Para $x\leqslant -1$ la función y = arc sen x es la función inversa de x = sen y en

la suposición que $\frac{\pi}{2}<y\leq\pi$. Como en este intervalo la función x = sec y es estrictamente creciente y continua (excepto para $y=\frac{\pi}{2}$), entonces la función y = arc sec x es estrictamente creciente y continua para $x\leq-1$.

y = arc cosec x (Fig. 24).

Definimos esta función para todos los valores de x que satisfacen la condición $|x|\geq 1$, , de la siguiente manera: arc cosec x es el ángulo y que satisface las desigualdades- $\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ y a la ecuación cosec y = x.

Por tanto la función y = arc cosec x para $x\geq 1$ es la función inversa de x = cosec y si hacemos $0<y\leq\frac{\pi}{2}$. Como en este intervalo la función x = cosec y es estrictamente creciente y continua (excepto para y = 0), entonces la función y = arc cosec x es estrictamente creciente y continua para $x\geq 1$.

Para $x\leq-1$ la función y = arc cosec x es la función inversa de x = cosec$y$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq y<0\right)$. . Como en este intervalo la función x = cosec y es estrictamente decreciente y continua (excepto para y = 0), entonces la función y = arc cosec x es estrictamente decreciente y continua para $x\leq-1$.

CAPITULO V

DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

DEFINICION Y CONCEPTO DE LA DERIVADA

1. Definición de la Derivada. Sea una función $y = f(x)$ definida en la vecindad de un punto x_0. Tomemos un punto x_1 de esta vecindad, diferente de x_0. La diferencia $x_1 - x_0$, que se representa por Δx, será designada con el nombre de incremento de la variable independiente. Similarmente, a la correspondiente diferencia $y_1 - y_0$ que denotaremos con el símbolo Δy la llamaremos incremento de la variable dependiente. Se obtienen las relaciones siguientes

$$x_1 = x_0 + \Delta x,$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y,$$
$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x).$$

Como

$$y_0 = f(x_0),$$

tendremos

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

será designado con el nombre de relación diferencial.

La expresión, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (suponiendo que x_0 tiene un valor definido constante) puede considerarse como una función del incremento Δx. Podemos investigar también si esta expresión tiene un límite cuando Δx, tiende a cero.

Si el límite de esta expresión, cuando Δx, tiende a cero existe, diremos que es la derivada de la función $y = f(x)$, con respecto a x, en el punto x_0. Representaremos a la derivada con el símbolo $f'(x)$, ó y'_x ó más brevemente con y' Frecuentemente la derivada se representa con el símbolo $\frac{dy}{dx}$. Este símbolo recuerda que la derivada es el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

De suerte que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=y'_x=y'=\frac{dy}{dx}.$$

La definición anterior para la derivada corresponde mas exactamente a la definición de la primera derivada de la función y = f(x) que debemos distinguir de las derivadas de orden superior, (como veremos más tarde.)

Ejemplos.

1. y = x. Representando por Δx un incremento arbitrario de la variable x y por Δy el correspondiente incremento de la variable y, obtenemos:

$$y+\Delta y=x+\Delta x.$$

de donde

$$\Delta y=\Delta x,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

por consiguiente,

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

Así pues, la derivada de la función y = x es igual a la unidad para todo x.

2. $y=x^2$. Calculemos la derivada para x = 2. Tenemos:

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2,$$

por tanto

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\,\Delta x+(\Delta x)^2;$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Pasando al límite, obtenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x.$$

Por consiguiente, para x = 2 encontramos y'_x = 4.8

3. $y=\frac{2x+1}{3x+1}$. Calculemos la derivada para x = 1. Tenemos:

$$y+\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1},$$

por tanto

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1}-\frac{2x+1}{3x+1}=-\frac{\Delta x}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)};$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)},$$

como

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{(3x+1)^2};$$

Así pues, para x = 1 obtenemos:

$$y'_x=-\frac{1}{16}.$$

4. $y=2+3x-x^2$. Calculemos la derivada para x = 0. Tenemos:

$$f(0)=2,$$
$$f(0+\Delta x)=f(\Delta x)=2+3\Delta x-(\Delta x)^2,$$

por tanto

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=3\Delta x-(\Delta x)^2;$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3-\Delta x;$$

así pues

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3.$$

2. Derivadas Unilaterales. De la misma manera como se definió el concepto de límite unilateral puede definirse también el concepto de derivada unilateral. Los límites unilaterales

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ y } \lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

definen las derivadas izquierda y derecha, respectivamente.

En particular, en los extremos del intervalo $[a, b]$ de definición de la función, puede hablarse solamente de derivadas unilaterales, es decir, de la derivada a la derecha en el punto a y de la derivada a la izquierda en el punto b. Las observaciones hechas en relación con las derivadas unilaterales son las mismas que las que se hicieran en relación con los límites unilaterales. En particular, de la existencia de la derivada se deduce la existencia de ambas derivadas unilaterales. Asímismo de la existencia e igualdad de las derivadas unilaterales se deduce la existen-

cia de la derivada.

3. Existencia de la Derivada y Continuidad. Para que la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenga un límite es necesario que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, es decir, que la función sea continua en el punto x_0. Sin embargo como se demostrará después, la continuidad no es suficiente para la existencia de la derivada.

4. La Derivada como Función. Si una función tiene derivada en cada uno de los puntos del intervalo $[a, b]$ (en los extremos del intervalo las derivadas se suponen unilaterales) entonces esta derivada puede considerarse como una nueva función de la variable x. Esta función recibe el nombre de la función derivada de la función primitiva - y = f(x). A su vez, se dice que la función f(x) posee derivadas y si no se indica un intervalo en particular, debe entenderse que la derivada existe en todos los puntos del intervalo de definición de la función f(x) (en los extremos del intervalo se considera únicamente la derivada unilateral).

5. Interpretación de la Derivada en Geometría y en Física. Consideremos que la gráfica de la función y = f(x) (Fig. 25). Es fácil observar que la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es igual a la tangente del ángulo α formado por la dirección positiva de la secante que pasa por los puntos A y B (correspondientes a los puntos x y $x+\Delta x$, con la dirección positiva del eje OX *. Si ahora el incremento Δx tiende a cero, esto es, que el punto B se aproxima al punto A, tendremos que el ángulo α tiende al ángulo σ formado por la dirección positiva de la tangente con la dirección positiva del eje OX, y $\operatorname{tg}\alpha$ tiende a $\operatorname{tg}\sigma$.

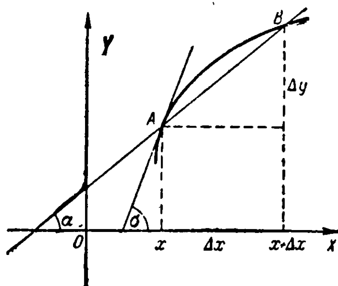


Fig. 25

Por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\sigma^{**}.$$

Así pues, puede afirmarse lo siguiente: La derivada en un punto dado x es igual a la tangente del ángulo formado por la dirección positiva de la tangente, en el punto (x, f (x)) de la curva con la dirección positiva del eje OX.

Observación. Conociendo la derivada, puede construirse fácilmente la tangente de la curva que representa gráficamente la función dada. Se

---

* Se considera además como dirección positiva de la secante, la dirección de A a B, es decir, la dirección en la que x crece.

** Volvemos a considerar positiva la dirección de la secante, aquella en que x crece.

ve también que si $y' = 0$, entonces tg $0 = 0$ y por consiguiente la tangente es paralela al eje OX. Obsérvase también que uno de los problemas ligados al concepto de derivada es el problema de la determinación de las tangentes a la curva.

Además de esta interpretación geométrica podemos encontrar multitud de ejemplos que ilustran el concepto de la derivada en Física.

Ejemplos.

1. Sea un punto material A que se desplaza sobre una recta. Elegido un sentido definido sobre esta recta y un punto arbitrario O, podemos determinar exactamente la posición del punto A por medio de un número s, cuyo valor absoluto es igual a la longitud del segmento OA. Anteponemos a s el signo +, si el sentido del vector OA coincide con el sentido elegido sobre la recta, y el signo - en el caso contrario. (Fig. 26).

Es claro que a cada momento de tiempo t corresponde una posición definida del punto A y a causa de ello un número definido s. Por tanto puede decirse que es una función del tiempo t, esto es,

$$s = f(t)$$



Fig. 26

Fijemos un momento cualquiera de tiempo t; representemos con Δt un incremento arbitrario de t, y con Δs el incremento correspondiente a la variable s. Si el movimiento es uniforme esto es, si el punto A recorre en tiempos iguales espacios iguales, la velocidad del cuerpo será definida por la relación $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, la que en este caso es constante. Si el movimiento es uniforme, definiremos la velocidad como el $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, por lo que la velocidad es la primera derivada del espacio con respecto al tiempo.

2. De la misma manera, definimos la aceleración como la primera derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

<u>6. Funciones Continuas que no Tienen Derivada en un Punto Dado. (Ejemplos).</u> Como ya se había dicho una función continua no forzosamente posee derivada finita. Como ejemplo puede servir la función $y = |x|$ (Fig. 27). En $x = 0$ la derivada no existe, las derivadas, derecha e izquierda, son respectivamente igual a +1 y -1.

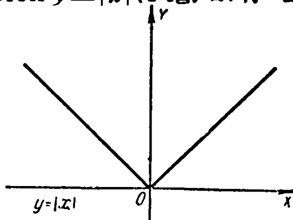


Fig. 27

Ejemplo de la función continua que no tiene derivada derecha ni derivada izquierda es la función

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0, \\ 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Para $x = 0$, encontramos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Pero la expresión $\sin \frac{1}{\Delta x}$ no tiene límite derecho ni límite izquierdo. En

efecto, haciendo $\Delta x_n = \frac{1}{n\pi}$, obtenemos $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\Delta x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$,

y haciendo $\Delta x_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, obtenemos: $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\Delta x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$.

Asímismo haciendo $\Delta x_n = -\frac{1}{n\pi}$, y correspondientemente $\Delta x_n = -\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$,

tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\Delta x_n} = 0,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\Delta x_n} = -1.$$

TEOREMAS SOBRE LA DERIVADA

7. Derivada de una Función Constante. La derivada de una función constante es igual a cero. Este teorema es evidente puesto que para todo Δx tenemos $\Delta y = 0$ y por consiguiente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$,

luego

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

8. Derivada de la Función Potencia. La derivada de la función

$$y = x^n$$

(siendo n un entero positivo) se expresa por la fórmula

$$y'_x = nx^{n-1}.$$

Esta fórmula es válida para $n > 1$ y para todo x y para n = 1 con $x \neq 0$. Para $n = 1$ y $x = 0$, esta fórmula pierde todo sentido (ya que la expresión 0^0 carece de contenido); en este caso, como vimos en la Pág. 72 la derivada es igual a la unidad.

Demostración. Si con Δx representamos el incremento de la variable x y con Δy el incremento correspondiente de la variable y, entonces

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n,$$

por consiguiente

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Aplicando el binomio de Newton, obtenemos:

$$\Delta y = \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n,$$

por consiguiente, en la suposición de que $n > 1$ (ver lo anterior), tendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0, \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0, \ldots, \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0,$$

entonces

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

9. Derivada del Producto de una Constante por una Función.

Teorema. Si

$$y = af(x),$$

siendo a un número constante y $f(x)$ una función con derivada en un punto x, entonces la función y tiene también una derivada en dicho punto x, igual a

$$y' = af'(x).$$

Ejemplo.

$$y = 5x^2.$$

Podemos hacer $a = 5$, $f(x) = x^2$. Como $f'(x) = 2x$, entonces

$$y'_x = 10x.$$

Demostración. Tenemos

$$y + \Delta y = a\, f(x + \Delta x),$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

por consiguiente,

$$y'_x = af'(x).$$

10. Derivada de Suma, Producto y Cociente.

Teorema. Si las funciónes $f(x)$, $\varphi(x)$ tienen derivadas en un punto x, entonces su suma y producto tienen también derivadas en dicho punto a saber:

1) La derivada de la suma $y = f(x) + \varphi(x)$ es igual a $y' = f'(x) + \varphi'(x)$.

2) La derivada del producto $y = f(x)\varphi(x)$ es igual a

$$y' = f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x).$$

3) Si adicionalmente suponemos que $\varphi(x) \neq 0$, existe la derivada del cociente $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y es i-

gual a

$$y' = \frac{\varphi(x) f'(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

Demostración. 1) Si con Δx y Δy representamos, respectivamente, los incrementos de las variables x é y, entonces de la relación

$$y = f(x) + \varphi(x)$$

obtenemos:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x);$$

restando de esta igualdad la anterior, obtenemos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Por consiguiente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

esto es

$$y'_x = f'(x) + \varphi'(x).$$

Ejemplo 1. Sea

$$y = x^2 + x^3.$$

podemos considerar

$$f(x) = x^2, \quad \varphi(x) = x^3.$$

Como

$$f'(x) = 2x, \quad \varphi'(x) = 3x^2,$$

entonces

$$y'_x = 2x + 3x^2.$$

2) Tenemos:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)\ \varphi(x + \Delta x);$$

de donde

$$\Delta y = f(x + \Delta x)\varphi(x + \Delta x) - f(x)\varphi(x).$$

Restando y sumando, en el miembro derecho de la igualdad anterior, el producto $f(x)\varphi(x + \Delta x)$, obtenemos:

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) - f(x)]\varphi(x + \Delta x) + f(x)\ [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)],$$

por consiguiente, con apoyo en los teoremas sobre los límites de la suma y del producto encontramos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)+$$
$$+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x};$$

como las funciones $f(x)$, $\varphi(x)$ son contínuas en el punto x, tendremos

$$y'=f'(x)\varphi(x)+f(x)\varphi'(x).$$

Ejemplo 2. Sea

$$y=(x^2+x^3)5x^2.$$

si hacemos

$$f(x)=x^2+x^3,\quad \varphi(x)=5x^2,$$

entonces

$$f'(x)=2x+3x^2,\quad \varphi'(x)=10x,$$

por consiguiente

$$y'=(2x+3x^2)5x^2+(x^2+x^3)10x=20x^3+25x^4.$$

3) Como se ha visto (ver Pág. 57) para valores suficientemente pequeños de Δx , tenemos

$$\varphi(x+\Delta x)\neq 0.$$

Por tanto, puede escribirse:

$$\Delta y=\frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

es decir,

$$\Delta y=\frac{f(x+\Delta x)\varphi(x)-\varphi(x+\Delta x)f(x)}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)}.$$

Restando y sumando en el numerador de la fracción, el producto $\varphi(x)f(x)$, obtenemos:

$$\Delta y=\frac{\varphi(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]-[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]f(x)}{\varphi(x+\Delta x)\varphi(x)},$$

de donde

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}}{\varphi(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)},$$

por consiguiente

$$y'=\frac{\varphi(x)f'(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

EJEMPLOS.

3. $y=\frac{1}{\varphi(x)}$;

En este caso $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$, por consiguiente,

$$y' = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

4. $y = x^{-5}$ para $x \neq 0$, ó $y = \frac{1}{x^5}$, de donde

$$y' = -\frac{5x^4}{x^{10}} = -5x^{-6}.$$

5. $y = \frac{x^2+5}{1+x^3}$.

Haciendo $f(x) = x^2 + 5$, $\varphi(x) = 1 + x^3$ en todo punto $x \neq -1$, obtenemos

$$y' = \frac{(1+x^3)\,2x - 3x^2(x^2+5)}{(1+x^3)^2} = \frac{2x - 15x^2 - x^4}{(1+x^3)^2}.$$

PROBLEMAS

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = 7$, $\qquad y' = 0.$

2. $y = x^6$, $\qquad y' = 6x^5.$

3. $y = 2x^3$, $\qquad y' = 6x^2.$

4. $y = x^4 + 1$, $\qquad y' = 4x^3.$

5. $y = 3x^2 + 2x - 6$, $\qquad y' = 6x + 2.$

6. $y = \frac{x^5 + 5x^3}{3} = \frac{1}{3}(x^5 + 5x^3)$, $\qquad y' = \frac{1}{3}(5x^4 + 15x^2).$

7. $y = (5 + 6x)(4 - 3x)$, $\qquad y' = 9(1 - 4x).$

8. $y = 2x^3(8x + 11)$, $\qquad y' = 64x^3 + 66x^2.$

9. $y = \frac{3}{4x^3}$, $\qquad y' = -\frac{9}{4x^4}.$

10. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}$, $\qquad y' = \frac{-16 + 4x + 4x^2}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

11. $y = \frac{3 + 2x}{3 - 2x}$, $\qquad y' = \frac{12}{(3 - 2x)^2}.$

12. $y = \frac{5}{x^3}$, $\qquad y' = -\frac{15}{x^4}.$

13. $y=9x^6+\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^{11}}$, $\qquad y'=54x^5-\frac{12}{x^5}+\frac{22}{x^{12}}$.

11. Derivada de una Función Compuesta. Si la función $y=f(\varphi(x))$ está formada por las funciónes $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, contínuas, entonces la derivada de la función compuesta existe y es igual a

$$y'_x=f'(u)\cdot u'_x,$$

ó

$$y'_x=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Ejemplo. Sea

$$y=(5+2x-3x^2)^5.$$

haciendo

$$u=5+2x-3x^2,$$

obtenemos:

$$y=u^5;$$

por tanto

$$y'=5u^4u'$$

y finalmente

$$y'=5(5+2x-3x^2)^4(2-6x).$$

Demostraremos en primer lugar el teorema formulado bajo la condición de que para $\Delta x\neq 0$

$$\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0.$$

Haciendo $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$, obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Como $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, tendremos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

por tanto

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

la demostración para el caso general se da en la Pág. 113

12. Derivada de la Función Inversa. Si una función estrictamente monótona $y=f(x)$ tiene, para cierto valor de x, derivada diferente de cero, entonces la función inversa $x=\varphi(y)$ tiene, en el punto y correspon-

diente, una derivada

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Demostración. Representemos por Δy el incremento de la variable y, y por Δx el incremento correspondiente de la variable x. Tendremos:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

por consiguiente,

$$\varphi'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Como $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x=0$, entonces

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

y, por consiguiente

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

EJEMPLOS.

1. $y=f(x)=\sqrt{x}$.

Elevando al cuadrado obtenemos:

$$y^2=x.$$

Por consiguiente, la función inversa es

$$x=\varphi(y)=y^2.$$

Como

$$\varphi'(y)=2y,$$

tendremos

$$y'_x=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. $y=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

Elevando al cuadrado:

$$y^2=\frac{x+1}{x+2},$$

de donde

$$x=\varphi(y)=\frac{1-2y^2}{y^2-1}.$$

Aplicando a $\varphi(y)$ el teorema sobre la derivada de un cociente, obtenemos:

$$\varphi'(y)=\frac{(y^2-1)(-4y)-(1-2y^2)2y}{(y^2-1)^2}=\frac{2y}{(y^2-1)^2}$$

y, por tanto,

$$y'_x=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{(y^2-1)^2}{2y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}.$$

Esta derivada puede calcularse también apoyándonos en el ejemplo anterior y en el teorema de la derivada de una función compuesta:

Haciendo

$$u=\frac{x+1}{x+2},$$

obtenemos:

$$y=\sqrt{u},$$

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\cdot\frac{(x+2)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2},$$

por consiguiente,

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}.$$

el mismo resultado anterior.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

13. Definición de la Diferencial. Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene una derivada contínua. Representemos por Δx un incremento arbitrario de la variable independiente x, y por Δy el correspondiente incremento de la variable dependiente y. La expresión

$$f'(x)\,\Delta x$$

que representaremos por los símbolos $d_x y$, $d_x f(x)$ será designada con el nombre de diferencial de la variable y con respecto a la variable x en el punto x. Escribiendo, por necesidades de simetría, $d_x x$ en lugar de Δx, obtenemos la siguiente fórmula:

$$d_x y=f'(x)\,d_x x, \tag{1}$$

de donde

$$\frac{d_x y}{d_x x}=f'(x). \tag{2}$$

Observemos, además, que las diferenciales $d_x y$ y $d_x x$ son funciones de la variable x, y que la función $d_x x$ adquiere un valor constante Δx.

14. Diferencial de una Función Compuesta. Consideremos ahora el caso en que x es una función de otra variable t:

$$x=\varphi(t).$$

Supongamos que la función $\varphi(t)$ es contínua y que tiene derivada contínua. Sea $x=\varphi(t_1)=x_1$ el valor de $\varphi(t)$ cuando $t = t_1$; se tendrá

Análogamente con lo anterior obtenemos la fórmula

$$d_t x = \varphi'(t_1)\, d_t t. \tag{3}$$

La variable y puede considerarse dependiente de t, a saber:

$$y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t),$$

Obtenemos ahora la relación

$$d_t y = \psi'(t_1)\, d_t t. \tag{4}$$

Pero con base en el teorema sobre la derivada de una función compuesta, vemos que

$$\psi'(t_1) = f'(x_1)\, \varphi'(t_1).$$

Substituyendo esta expresión en la fórmula (4), obtenemos:

$$d_t y = f'(x_1)\, \varphi'(t_1)\, d_t t,$$

de donde, en virtud de la fórmula (3)

$$d_t y = f'(x_1)\, d_t x. \tag{5}$$

Comparando la fórmula (1) con la fórmula (5) advertimos que pueden escribirse simbólicamente en la forma

$$dy = f'(x)\, dx. \tag{6}$$

Las fórmulas (1) y (5) pueden obtenerse de la fórmula (6) escribiendo en lugar de d, correspondientemente, d_x ó d_t.

Los símbolos dy y dx no son los más adecuados. Sin embargo, cuando no haya posibilidad de confusión los usaremos en lugar de los símbolos $d_x y$, $d_x x$ ó de los correspondientes $d_t y$. $d_t x$. Se aprecia el valor de la fórmula (6) si volvemos la atención al hecho de que se emplean dos fórmulas para determinar la derivada de y con respecto á x. A saber, cuando la variable y depende directamente de x, entonces

$$y'_x = f'(x)$$

cuando la dependencia de la variable y con respecto á x se da por medio de otra función (intermedia) u, entonces

$$y'_x = f'(u)\, u'_x.$$

Para encontrar las diferenciales, usamos en ambos casos, las mismas fórmulas:

$$d_x y = f'(x)\, d_x x,$$
$$d_x y = f'(u)\, d_x u$$

ó

$$dy = f'(x)\, dx,$$
$$dy = f'(u)\, du.$$

15. Diferencial de la Suma, el Producto y el Cociente. De los teoremas sobre las derivadas de la suma, el producto y el cociente pueden obtenerse fórmulas análogas, las diferenciales de la suma, producto y cociente. Sean u y v funciones de x:

$$u=f(x), \quad v=\varphi(x),$$

que poseen derivadas continuas. Si hacemos

$$y=u+v.$$

entonces

$$y'_x=u'_x+v'_x,$$

de donde

$$y'_x dx=u'_x dx+v'_x dx,$$

por consiguiente,

$$dy=du+dv,$$

es decir,

$$d(u+v)=du+dv.$$

análogamente

$$d\,cu=c\,du,$$

donde c es un número constante

$$d(uv)=u\,dv+v\,du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

Observación. En la práctica frecuentemente resulta más conveniente operar con diferenciales y después dividiendo entre la diferencial de la variable independiente, pasar a las derivadas.

16. Interpretación Geométrica de la Diferencial. La diferencial puede representarse geométricamente de la siguiente manera.

En la Fig. 28 se ve que

$$dy=f'(x)\,dx=\operatorname{tg}\alpha\cdot dx=CD.$$

La diferencial dy, en términos generales, es diferente de Δy, pero su diferencia BD es muy pequeña en comparación con dx, para dx muy pequeñas, ya que

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\Delta y-dy}{dx}=\lim_{dx\to 0}\left[\frac{\Delta y}{dx}-\frac{dy}{dx}\right]=f'(x)-f'(x)=0.$$

En la práctica, cuando se trata solamente de valores aproximados puede considerarse, para pequeños incrementos dx, que

$$\Delta y=dy=f'(x)\,dx.$$

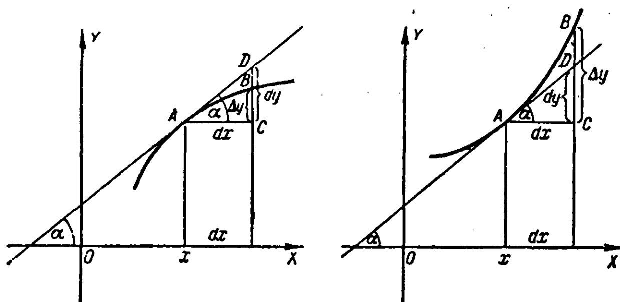


Fig. 28

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

17. Derivada de la Función Potencia. La derivada de la función

$$y = x^n$$

para un n arbitrario, se expresa por la fórmula

$$y'_x = nx^{n-1} \quad (x \neq 0).$$

Ya hemos demostrado (Pág.76) esta fórmula para el caso en que n es un entero regativo. Pasemos ahora a los casos restantes, a saber, cuando:

n es un número entero negativo,

n es un número racional,

n es un número real arbitrario,

n es un número entero negativo.

Haciendo $n = -r$ $(r > 0)$, presentamos la función en la forma

$$y = \frac{1}{x^r} \quad (x \neq 0).$$

De acuerdo con el teorema sobre la derivada de un cociente, tenemos:

$$y'_x = \frac{x^r \cdot 0 - rx^{r-1}}{x^{2r}}, \text{ es decir } y'_x = -\frac{rx^{r-1}}{x^{2r}} = -rx^{-r-1},$$

así pues

$$y'_x = nx^{n-1}.$$

n es el número recíproco de un entero. Hagamos $n=\frac{1}{r}$

$$y=x^{\frac{1}{r}}.$$

que es la función inversa de

$$x=y^{r},$$

por consiguiente ,

$$x'_y=ry^{r-1}.$$

de donde, por el teorema sobre la derivada de una función inversa tenemos:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{ry^{r-1}}\,(y\neq 0,\ \ x\neq 0).$$

como

$$y^{r-1}=\left(x^{\frac{1}{r}}\right)^{r-1}=x^{1-\frac{1}{r}}=x^{-\left(\frac{1}{r}-1\right)},$$

entonces

$$y'_x=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{x^{-\left(\frac{1}{r}-1\right)}},$$

ó

$$y'_x=\frac{1}{r}\,x^{\frac{1}{r}-1},$$

así que, otra vez

$$y'_x=nx^{n-1}\ (\text{si}\ \ x\neq 0).$$

Para x = 0 la derivada no existe.

n es un número racional. Hagamos $n=\frac{p}{q}$.. Podemos entonces, considerar la función

$$y=x^{\frac{p}{q}}\quad (x\geqslant 0)$$

como una función compuesta formada por las funciones

$$y=u^{p}\ \ \text{y}\ \ u=x^{\frac{1}{q}}.$$

Por el teorema sobre la derivada de una función compuesta, para $x\neq 0$ tenemos:

$$y'_x=y'_u u'_x,$$

$$y'_x=pu^{p-1}\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1},$$

$$y'_x=p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1},$$

$$y'_x=\frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1}=\frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1},$$

es decir, nuevamente

$$y'_x = nx^{n-1}.$$

n es un número irracional. En este caso nuestra función puede considerarse compuesta, formada por las funciones

$$y = e^u, \quad u = n \log_e x \quad (= n \ln x).$$

Entonces, con base el párrafo 19 (ver Pág.90) tenemos para $x \neq 0$

$$y'_x = y'_u u'_x = e^u \frac{n}{x}$$

de donde, como

$$e^u = y = x^n,$$

tenemos:

$$y'_x = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Si $n > 1$, puede demostrarse que la derivada $y'_x = 0$ para x = 0.

Si $n < 1$, entonces para x = 0, la derivada no existe.

Ejemplos.

1. $y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$,

por consiguiente,

$$y' = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}.$$

2. $y = x^{\sqrt{2}}$,

$y' = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$.

3. $y = \sqrt{x+a} = (x+a)^{\frac{1}{2}}$,

así que

$$y' = \frac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+a}}.$$

Usamos, para esto, el teorema sobre la derivada de una función compuesta (u = x + a).

PROBLEMAS

1. $y = \sqrt[3]{3x - 2x^2}$, $\qquad y' = \dfrac{3 - 4x}{3\sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}}$.

2. $y = 7x\sqrt{1+2x}$, $\qquad y' = \dfrac{7(1+3x)}{\sqrt{1+2x}}$.

3. $y = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$, $\qquad y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$.

18. Derivada de una Función Logarítmica. La derivada de la función

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

se expresa mediante la fórmula

$$y'_x = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

(donde ln a = $\log_e a$).

Demostración. Tenemos:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x),$$

de donde

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x,$$

por consiguiente,

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

por tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

ó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]. \quad (1)$$

haciendo $\frac{x}{\Delta x} = r$, obtenemos: $\lim_{\Delta x \to 0} |r| = +\infty$, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{|r| \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e.$$

En virtud de (1) tenemos:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

Como el logaritmo es una función contínua, tendremos

$$y'_x = \frac{1}{x}\log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

En particular, si $y = \log_e x = \ln x$, entonces $y'_x = \frac{1}{x}$.

Así pues, si se toma el número e como base de los logaritmos, la derivada expresa más sencillamente, en la forma $\frac{1}{x}$. Los logaritmos de base e se llaman logaritmos naturales. Siempre que se escriba ln x sin indicar su base, se entenderá que se trata del logaritmo natural del número x.

Ejemplos.

1. $y = \log_{10} x,\quad y' = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{1}{x} \cdot 0.4342945\ldots$

2. $y = \ln f(x) \quad (f(x) > 0).$

Haciendo

$$u=f(x),$$

tenemos:

$$y=\ln u,\quad y'_x=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

3. $y=\ln\sqrt{10x-x^2}=\frac{1}{2}\ln(10x-x^2)$. Aquí tenemos $f(x)=10x-x^2$,

por consiguiente, según el ejemplo anterior,

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{10-2x}{10x-x^2}=\frac{5-x}{10x-x^2}.$$

PROBLEMAS

1. $y=\ln 8x,$ $\qquad y'=\frac{1}{x}.$
2. $y=\ln\frac{5+4x}{3+7x}=\ln(5+4x)-\ln(3+7x),$ $\qquad y'=\frac{-23}{(5+4x)(3+7x)}.$
3. $y=\ln(\ln x),$ $\qquad y'=\frac{1}{x\ln x}.$

19 Derivada de una Función Exponencial. La derivada de la función

$$y=a^x$$

se expresa por la fórmula

$$y'=a^x\ln a.$$

En particular, si

$$y=e^x,$$

entonces

$$y'=e^x.$$

Demostración. La función inversa de $y=a^x$, es la función $x=\log_a y$. Así pues,

$$x'_y=\frac{1}{y}\log_a e,$$

en virtud del teorema sobre la derivada de una función inversa, cuidando que $x'_y\neq 0$, obtenemos:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{y}{\log_a e}=a^x\ln a.$$

En particular, si a = e, entonces ln a = 1, por consiguiente, cuando $y=e^x$, tendremos $y'_x=e^x$.

Así pues, la función $y=e^x$ tiene la interesante propiedad de que es

igual a su derivada.

Ejemplos.

1. $y=5^x, \quad y'=5^x \ln 5.$

2. $y=e^{x^2}.$

Haciendo $u=x^2$, obtenemos:

$$y=e^u, \quad y'=e^u u'=2xe^{x^2}.$$

3. $y=e^{\sqrt{1+2x+3x^2}}.$

Haciendo $u=\sqrt{1+2x+3x^2}=(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{2}}$, tenemos nuevamente:

$$y=e^u, \quad y'=e^u u';$$

calculamos u' aplicando otra vez el teorema sobre la derivada de una función compuesta. Haciendo $v=1+2x+3x^2$, obtenemos:

$$u=v^{\frac{1}{2}}, \quad u'=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}v',$$

por consiguiente,

$$u'=\frac{1}{2}\frac{2+6x}{\sqrt{1+2x+3x^2}},$$

de donde

$$y=\frac{1+3x}{\sqrt{1+2x+3x^2}}e^{\sqrt{1+2x+3x^2}}.$$

PROBLEMAS

1.

1. $y=(7^{2x}+3)^5$, $\quad y'=10(7^{2x}+3)^4 7^{2x}\ln 7.$
2. $y=\ln(11e^x+2)$, $\quad y'=\frac{11e^x}{11e^x+2}.$
3. $y=x^3e^x$, $\quad y'=e^x(x^3+3x^2).$

20. Derivadas de las Funciones Trigonométricas. y = sen x, y' = cos x.

Tenemos

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

por consiguiente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Haciendo $\frac{\Delta x}{2} = h$, obtenemos, a causa de la continuidad de las funciones sen x y cos x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} h = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{(ver Pág. 53)},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \lim_{h \to 0} \cos (x + h) = \cos x.$$

por consiguiente,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x.$$

Observemos que cos x = $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; por consiguiente, la función y = cos x puede expresarse como una función compuesta, formada por las funciones

$$y = \sin z \quad \text{y} \quad z = \frac{\pi}{2} - x.$$

Aplicando el teorema sobre la derivada de una función compuesta obtenemos:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x;$$

pero

$$y'_z = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x,$$

y

$$z'_x = -1,$$

por consiguiente,

$$y'_x = -\sin x.$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Como $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, entonces por el teorema sobre la derivada del cociente, obtenemos

$$y'_x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

por consiguiente,

$$y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

Similarmente con lo anterior $y=\frac{\cos x}{\sin x}$, así que

$$y'_x=\frac{\sin x\cdot(-\sin x)-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$y=\sec x$, $y'=\sec x \operatorname{tg} x$.

Tenemos:

$$y=\frac{1}{\cos x},$$

por tanto

$$y'_x=\frac{\cos x\cdot 0-1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

de donde

$$y'_x=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x \operatorname{tg} x.$$

$y=\operatorname{cosec} x$, $y'=-\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$.

Tenemos:

$$y=\frac{1}{\sin x},$$

por consiguiente,

$$y'_x=\frac{\sin x\cdot 0-1\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x};$$

de donde

$$y'_x=-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x.$$

Ejemplos.

1. y = sen 4 x. Haciendo u = 4x, obtenemos y = sen u, así que

$$y'=\cos u\cdot u'=4\cos 4x.$$

2. $y=\operatorname{tg} x^2$. Haciendo $u=x^2$; obtenemos y = tg u,

$$y'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u',$$ por consiguiente, $$y'=\frac{1}{\cos^2 x^2}\cdot 2x.$$

3. y = $\cos^{10}$x. Haciendo u = cos x, encontramos y = u^{10}, así que

$$y'=10u^9u'=-10\cos^9 x\sin x.$$

PROBLEMAS

1. $y=2\cos x+5\sin x$, $\quad y'=-2\sin x+5\cos x.$

2. $y=\cos 2x+1$, $\quad y'=-2\sin 2x.$

3. $y = \sin^2 x$, $\quad y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

4. $y = \operatorname{ctg}(x + e^x)$, $\quad y' = -\frac{1+e^x}{\sin^2(x+e^x)}$.

21. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

$$y = \arcsin x, \quad y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

la función inversa será $x = \operatorname{sen} y$, por consiguiente,

$$x'_y = \cos y.$$

De donde, según el teorema sobre la derivada de una función inversa obtenemos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

donde $y \neq \pm\frac{\pi}{2}$, que corresponde a los valores $x \neq \pm 1$.

Como

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

(la raíz positiva, porque $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$), entonces

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2},$$

de donde

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Observación. Puede demostrarse que para $x = \pm 1$ la derivada no existe.

$$y = \arccos x, \quad y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

La demostración es semejante a la anterior.

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y'_x = \frac{1}{1+x^2}.$$

La función inversa será $x = \operatorname{tg} y$, por consiguiente

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

(puesto que $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, entonces x'_y existe siempre y es diferente de cero).

De donde

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

pero

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$$

por consiguiente

$$y'_x = \frac{1}{1+x^2}.$$

$y = \operatorname{arcctg} x, \quad y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$

La demostración es análoga a la anterior

$y = \operatorname{arcsec} x, \quad y'_x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$

La función inversa será x = sec y y por consiguiente,

$$x'_y = \sec y \operatorname{tg} y$$

(con exclusión de $y=0$, $y=\pi$, que corresponde a los valores $x=\pm 1$), de donde

$$y'_x = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y}.$$

Para $x > 1$ tendremos $0 < y < \frac{\pi}{2}$, por tanto

$$\sec y = x = |x|,$$

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Tomamos la raíz de signo positivo, porque en este caso tg y es positiva. Por consiguiente, para $x > 1$ tendremos

$$y'_x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Para $x < -1$ tenemos $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, es decir, $\operatorname{tg} y < 0$, por tanto

$$\operatorname{tg} y = -\sqrt{\sec^2 y - 1} = -\sqrt{x^2 - 1},$$

por consiguiente

$$y'_x = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}};$$

Como $x < -1$, entonces $|x| = -x$ y nuevamente

$$y'_x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

$y = \operatorname{arccosec} x, \quad y'_x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$

La demostración es semejante a la anterior .

Ejemplos.

1. $y = \arcsin \sqrt{x^3}$.

Haciendo

$$u = x^{\frac{3}{2}},$$

tenemos:

$$y = \arcsin u,$$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$$

por consiguiente,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$

2. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

Haciendo

$$u = \frac{1-x}{1+x},$$

entonces

$$y = \operatorname{arctg} u,$$
$$y' = \frac{u'}{1+u^2},$$

pero

$$u' = \frac{(1+x)\cdot(-1)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2},$$

por consiguiente,

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

3. $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$.

Sea

$$u = \sqrt{x}.$$

obtenemos

$$y = \operatorname{arcctg} u,$$
$$y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u' = -\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

PROBLEMAS

1. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad y' = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

2. $y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, $\quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $\quad y' = \arcsin x$.

22. Derivada Logarítmica. Consideremos la función

$$y = \{f(x)\}^{\varphi(x)},$$

donde las funciones f (x) y $\varphi(x)$ son contínuas, además $f(x) > 0$. Tomando logaritmos naturales en ambos miembros, obtenemos:

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x).$$

Consideraremos á ln y como una función compuesta de la variable x. Encontremos su derivada:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (1)$$

La expresión $\frac{y'}{y}$ recibe el nombre derivada logarítmica de la función y. La igualdad (1) tomando en cuenta que $y = \{f(x)\}^{\varphi(x)}$, nos da

$$y' = \{f(x)\}^{\varphi(x)} \left[\varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Así pues, mediante la derivada logarítmica podemos determinar la derivada de la función $y = \{f(x)\}^{\varphi(x)}$.

Ejemplos.

1. Encontrar la derivada de la función $y = x^x$ $(x > 0)$. Tenemos

$$\ln y = x \ln x$$

por consiguiente,

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

de donde

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

2. Determinar la derivada de la función $y = (\sin x)^{\cos x}$ $(0 < x < \pi)$.

Tomando logaritmos, obtenemos:

$$\ln y = \cos x \ln \sin x,$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x},$$

por consiguiente.

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right].$$

PROBLEMAS

1. $y = x^{\ln x}$, $\quad y' = 2x^{\ln x - 1} \ln x$.

2. $y=(\ln x)^x$, $y'=(\ln x)^{x-1}[1+\ln x\cdot\ln\ln x]$.

3. $y=\left(\frac{x}{e}\right)^x$, $y'=\left(\frac{x}{e}\right)^x\ln x$.

DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

23. Derivadas de Orden Superior. Si la función $y=f(x)$ tiene una primera derivada, entonces la derivada de esta derivada, si existe, recibe el nombre de derivada segunda de la función $f(x)$.

Análogamente, la derivada de la segunda derivada se llama derivada tercera, etc. Simbólicamente las derivadas de orden superior se escribirán de la siguiente manera:

$$y'_x,\ y''_{x^2},\ y'''_{x^3},\ y^{(4)}_{x^4},\ y^{(5)}_{x^5},\ \ldots,\ y^{(n)}_{x^n},$$

ó

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{(4)},\ y^{(5)},\ \ldots,\ y^{(n)},$$

ó

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ f^{(5)}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),$$

o también

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \frac{d^5y}{dx^5},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Ejemplos.

1. Encontrar las derivadas de la función $y=a^x$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= a^x\ln a,\\ y'' &= a^x(\ln a)^2,\\ y''' &= a^x(\ln a)^3,\\ &\cdots\cdots\\ y^{(n)} &= a^x(\ln a)^n. \end{aligned}$$

Si $y=e^x$, entonces $y^{(n)}=e^x$.

2. Encontrar la derivada de la función $y=x^k$. Tenemos:

$$y'=kx^{k-1},\qquad y'''=k(k-1)(k-2)x^{k-3},$$
$$y''=k(k-1)x^{k-2},\qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=k(k-1)(k-2)\ldots[k-(n-1)]x^{k-n}.$$

Si k es un número natural, tendremos

$$y^{(k)}=k(k-1)(k-2)\ldots[k-(k-2)]\cdot 1=k!,$$
$$y^{(k+1)}=0.$$

3. Encontrar las derivadas de la función $y=\ln x$. Tenemos:

$$y'=\frac{1}{x},$$
$$y''=-\frac{1}{x^2}=(-1)^1\cdot\frac{1}{x^2},$$
$$y'''=\frac{1\cdot 2}{x^3}=(-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^3},$$

$$y^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4} = (-1)^3\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

4. Encontrar las derivadas de la función y = sen x. Tenemos

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Análogamente, si y = cos x, entonces

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

PROBLEMAS

1. $y = e^{3+4x}$, $\quad y'' = 4^2e^{3+4x}$, $y''' = 4^3e^{3+4x}$, ..., $y^{(n)} = 4^ne^{3+4x}$.
2. $y = \sin 5x$, $\quad y^{(n)} = 5^n\sin\left(5x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.
3. $y = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, $\quad y'' = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.
4. $y = \ln f(x)$, $\quad y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$.
5. $y = \sqrt{x}$, $\quad y''' = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}}$.

24. Fórmula de Leibniz. Sea y = u v, donde u y v son funciones de la variable x. Entonces

$$y' = u'v + v'u,$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}.$$

Vemos pues, que los coeficientes de las fórmulas escritas antes se ob-

tienen igual que en el desarrollo del binomio $(a+b)^n$ según la fórmula de Newton. Con ayuda de la inducción completa puede demostrarse la validez de la fórmula, semejante a la fórmula de Newton, a saber:

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}.$$

Esta fórmula se designa con el nombre de fórmula de Leibniz.

Ejemplos.

1. Determinar la derivada enésima de la función $y = xe^x$.

Haciendo $u = e^x$, $v = x$, obtenemos, según la fórmula de Leibniz:

$$y^{(n)}=xe^x+ne^x.$$

2. Frecuentemente la fórmula de Leibniz permite determinar con facilidad el valor de la derivada enésima para un valor particular de x. Aclaremos con algunos ejemplos.

Determinar el valor de la derivada enésima de la función $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, para $x = 0$.

Tenemos:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

de donde

$$f'(x)(1+x^2)=1.$$

Tomando ahora la derivada enésima según la fórmula de Leibniz, obtenemos:

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2)+\binom{n}{1}f^{(n)}(x)\cdot 2x+\binom{n}{2}f^{(n-1)}(x)\cdot 2=0.$$

Haciendo $x = 0$ obtenemos:

$$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0,$$

por consiguiente,

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0) \qquad (n>0).$$

Hemos obtenido una fórmula conveniente de reducción para el valor de la derivada enésima, cuando $x = 0$.

Como $f'(0)=1$, $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, esto es $f''(0)=0$, entonces, haciendo $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, obtenemos de la fórmula de reducción

$$f'''(0)=-2\cdot 1=-2,$$
$$f^{(4)}(0)=0,$$
$$f^{(5)}(0)=-4\cdot 3\cdot(-2)=24,$$
$$\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Determinar el valor de la derivada enésima de la función

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-3x+1}$$

para x = 0.

Tenemos:

$$f(x)(x^2-3x+1)=2x+1.$$

Tomando la derivada enésima $(n>2)$, obtenemos:

$$f^{(n)}(x)(x^2-3x+1)+\binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)(2x-3)+\binom{n}{2}f^{(n-2)}(x)\cdot 2=0.$$

Haciendo x = 0, encontramos:

$$f^{(n)}(0)-3nf^{(n-1)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0,$$

de donde

$$f^{(n)}(0)=3nf^{(n-1)}(0)-n(n-1)f^{(n-2)}(0) \qquad (n>2).$$

Determinando la primera y la segunda derivadas directamente, obtenemos:

$$f'(0)=5, \quad f''(0)=28;$$

después haciendo n = 3, 4, 5, ..., determinamos mediante la fórmula de reducción, las derivadas de orden superior.

PROBLEMAS

1. $y=e^x(3x^2-4)$, $\quad y^{(n)}=e^x[3x^2+6nx+3n(n-1)-4]$.
2. $y=x\ln x$, $\quad y^{(n)}=\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$.
3. $y=x^2\sin x$,

$$y^{(n)}=x^2\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]+n(n-1)\sin\left[x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right].$$

4. $f(x)=(\arcsin x)^2$, $\quad (1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2$,
$f^{(2n+1)}(0)=0$, $\quad f^{(2n)}(0)=2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots(2n-2)^2$.
5. $f(x)=e^{\sin x}$, $\quad f'(x)=f(x)\cos x$,

$$f^{(n+1)}(0)=f^{(n)}(0)-\binom{n}{2}f^{(n-2)}(0)+\binom{n}{4}f^{(n-4)}(0)-\ldots,$$

de donde

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}=-3,\ldots$$

25. Representación Paramétrica de una Función. Sean dadas las dos funciones

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t)$$

de una variable t, definidas y continuas en uno y el mismo intervalo. Si

la función x = f (t) es estrictamente monótona, entonces existe su función inversa $t=\psi(x)$, es también contínua y estrictamente monótona. Por esta razón y puede considerarse como una variable dependiente de la variable x a través de la variable intermedia t. Haciendo

$$y=\varphi(\psi(x))=F(x),$$

vemos que la función y = F (x) es continua. Diremos que esta función ha sido dada paramétricamente, por medio de la variable t.

Ejemplo 1. Sea

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant\pi).$$

Como la función x = r cos t decrece estrictamente para $0\leqslant t\leqslant\pi$, entonces, despejando t de la primera ecuación y substituyendo en la segunda, obtenemos la función buscada de la variable x.

O más fácilmente, si observamos que

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=r^2,$$

de donde

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Escogemos la raíz de signo positivo ya que la función y = r sen t es no negativa para $0\leqslant t\leqslant\pi$.

Tomando $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$, obtenemos:

$$y=-\sqrt{r^2-x^2}.$$

Vemos así que cuando t varía de 0 a 2π, las fórmulas

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t$$

determinan dos funciones de la variable x cuyas gráficas forman una circunferencia completa.

La representación paramétrica tiene un valor particularmente importante en el estudio del movimiento de un punto. Si un punto se mueve en un plano, sus coordenadas x, y, serán funciones del tiempo t. Dadas estas funciones

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t),$$

el movimiento del punto queda perfectamente determinado. En todo intervalo de tiempo, en el que la función f (t) sea estrictamente monótona, puede procederse como antes, para determinar la función y = F (x) cuya gráfica será la curva descrita, en este intervalo de tiempo, por el punto de movimiento. En el ejemplo anterior las funciones describían el movimiento uniforme de un punto sobre una circunferencia.

Supongamos ahora que las funciones

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t)$$

poseen derivadas contínuas en la vecindad de cierto valor de t y que además para ese valor, f '(t) ≠ 0. Sea la función $t=\psi(x)$ la función inversa (en

la vecindad del punto t) de x = f (t). Como la función $\psi(x)$ tiene una derivada que se expresa por la fórmula

$$\psi'(x)=\frac{1}{f'(t)},$$

entonces, por el teorema sobre la derivada de una función compuesta, la función y = F (x) = $\varphi(\psi(x))$ tiene por derivada

$$y'_x=\varphi'(\psi(x))\cdot\psi'(x),$$

por consiguiente,

$$y'_x=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}.$$

Demostramos, por lo tanto, que la derivada de una función representada paramétricamente, se expresa por la fórmula

$$y'_x=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)},$$

si solamente $f'(t)\neq 0$.

Ejemplo 2. Considerando la función definida en el ejemplo 1, obtenemos:

$$y'_x=\frac{r\cos t}{-r\sin t}=-\operatorname{ctg} t \qquad (t\neq 0,\ \pi).$$

Es fácil determinar las derivadas de orden superior, admitiendo la existencia de las correspondientes derivadas de las funciones $f(t)$ y $\varphi(t)$.

Obtenemos la derivada segunda de la siguiente manera. Observemos que la función y'_x está dada paramétricamente por las funciones:

$$y'_x=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}=\varphi_1(t),$$
$$x=f(t).$$

de donde

$$y''_x=\frac{\varphi'_1(t)}{f'(t)},$$

por consiguiente

$$y''_x=\frac{f'(t)\varphi''(t)-f''(t)\varphi'(t)}{[f'(t)]^3}.$$

Análogamente, haciendo $y''_x=\varphi_2(t)$, obtenemos:

$$y'''_x=\frac{\varphi'_2(t)}{f'(t)},$$

por consiguiente,

$$y'''_x=\{[f'(t)]^2\varphi'''(t)-f'(t)f'''(t)\varphi'(t)-$$
$$-3f'(t)f''(t)\varphi''(t)+3[f''(t)]^2\varphi'(t)\}\cdot\frac{1}{[f'(t)]^5}.$$

Prosiguiendo de la misma manera podemos determinar la derivada de cualquier orden.

PROBLEMAS

1. $y = at,$ $\quad x = a(1-t),$ $\qquad y'_x = -1.$
2. $y = \sin^2 t,$ $\quad x = \sin 2t,$ $\qquad y'_x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t.$
3. $y = \sin t - t\cos t,$ $\quad x = \cos t + t\sin t,$ $\qquad y'_x = \operatorname{tg} t.$
4. $y = \frac{1}{2}t^2,$ $\quad x = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3},$ $\qquad y'_x = \sqrt{\frac{t}{2}}.$

26. Diferenciales de Orden Superior. Como ya se ha dicho, la diferencial

$$d_x y = f'(x)\, d_x x$$

es una función de la variable x. Cabe entonces hablar de la diferencial de una diferencial. Escribamos

$$d_x(d_x y) = d_x^2 y,$$
$$d_x(d_x^2 y) = d_x^3 y,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d_x(d_x^{n-1} y) = d_x^n y.$$

Llamaremos diferencial enésima ó diferencial de enésimo orden a la expresión $d_x^n y$

Aplicando el teorema sobre la diferencial del producto, obtenemos:

$$d_x^2 y = d_x[f'(x)\, d_x x] = d_x f'(x)\, d_x x + f'(x) d_x^2 x.$$

Como

$$d_x f'(x) = f''(x)\, d_x x,$$

y

$$d_x^2 x = 0$$

(ya que $d_x x$ es constante), entonces

$$d_x^2 y = f''(x)\,(d_x x)^2.$$

Se obtienen, similarmente:

$$d_x^3 y = f'''(x)\,(d_x x)^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d_x^n y = f^{(n)}(x)\,(d_x x)^n.$$

De donde

$$f''(x) = \frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{d_x^3 y}{(d_x x)^3}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{d_x^n y}{(d_x x)^n}.$$

Escribiendo d en lugar de d_x y dx^n en lugar de $(d_x x)^n$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x),$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

Debe, sin embargo, recordarse que en estas fórmulas las diferenciales se han tomado con respecto a la variable x.

Aceptemos ahora que y y x son funciones de la variable t. Obtendremos:

$$d_ty=f'(x)\,d_tx,$$
$$d_t^2y=f''(x)\,(d_tx)^2+f'(x)d_t^2x.$$
$$d_t^3y=f'''(x)\,(d_tx)^3+2f''(x)\,d_txd_t^2x+f''(x)\,d_txd_t^2x+f'(x)d_t^3x$$

(Como ahora d_tx no es una función constante, d_t^2x no podrá eliminarse), y por consiguiente

$$d_t^3y=f'''(x)\,(d_tx)^3+3f''(x)\,d_txd_t^2x+f'(x)\,d_t^3x.$$

Empleando los símbolos incompletos, obtenemos:

$$dy=f'(x)\,dx,$$
$$d^2y=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x,$$
$$d^3y=f'''(x)\,dx^3+3f''(x)\,dxd^2x+f'(x)\,d^3x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Observemos que éstas fórmulas son efectivas siempre y cuando en lugar de d se escriba d_x, ya que entonces

$$d_x^2x=0,\quad d_x^3x=0\text{, etc.}$$

Como antes, continuaremos usando los símbolos incompletos en todos los casos en que no haya posibilidad de confusión.

Si la función y = F (x) es dada paramétricamente por las funciones

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),$$

entonces, tomando diferenciales con respecto a la variable t, obtenemos:

$$dy=F'(x)\,dx=y'_xdx,$$

de donde

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{f'(t)\,dt}=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}.$$

Diferenciando otra vez con respecto á t, encontramos:

$$dy'_x = d\frac{dy}{dx},$$

por consiguiente,

$$y''_x dx = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

de donde

$$y''_x = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Haciendo

$$\begin{aligned} dx &= f'(t)\,dt, \\ d^2x &= f''(t)\,dt^2, \\ dy &= \varphi'(t)\,dt, \\ d^2y &= \varphi''(t)\,dt^2, \end{aligned}$$

obtenemos la fórmula deducida en la Pág. 103 . Análogamente

$$dy''_x = d\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3},$$

$$y'''_x = \frac{dx^2d^3y - dxd^3xdy - 3dxd^2xd^2y + 3(d^2x)^2\,dy}{dx^5}.$$

De aquí fácilmente obtenemos la fórmula mostrada en la Pág. 103

Sea la función y = f(x), cuya función inversa es $x = \varphi(y)$. Determinemos las derivadas de la función $\varphi(y)$ por medio de las derivadas de la función f(x).

Observemos que diferenciando con respecto a la variable y, encontramos:

$$\begin{aligned} d^2y &= d^3y = \ldots = 0, \\ dx &= x'_y dy = \varphi'(y)\,dy, \\ d^2x &= x''_y dy^2 = \varphi''(y)\,dy^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^nx &= x^{(n)}_y dy^n = \varphi^{(n)}(y)\,dy^n. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\,dx = f'(x)\,x'_y dy, \\ d^2y &= 0 = f''(x)\,(x'_y)^2dy^2 + f'(x)\,x''_y dy^2, \\ d^3y &= 0 = f'''(x)\,(x'_y)^3\,dy^3 + 3f''(x)\,x'_y x''_y dy^3 + f'(x)\,x'''_y dy^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{1}{f'(x)}, \\ x''_y &= -\frac{f''(x)(x'_y)^2}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \\ x'''_y &= \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}. \end{aligned}$$

$$\varphi'(y) = x'_y = \frac{1}{f'(x)}.$$

Tomando la derivada con respecto á y y considerando $f'(x)$ como una función compuesta de la variable y á través de la variable x, obtenemos:

$$x''_y = -\frac{f''(x)\,x'_y}{[f'(x)]^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},$$

$$x'''_y = -\frac{[f'(x)]^3 f'''(x)\,x'_y - f''(x)\cdot 3\,[f'(x)]^2 f''(x)\,x'_y}{[f'(x)]^6},$$

por consiguiente,

$$x'''_y = \frac{3\,[f''(x)]^2 - f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

PROBLEMAS

1. $y = 11$, $y' = 0.$
2. $y = 4x + 7$, $y' = 4.$
3. $y = 9x^4$, $y' = 36x^3.$
4. $y = a + 2bx + cx^2$, $y' = 2b + 2cx.$
5. $y = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$, $y' = -\frac{8}{x^5}.$
6. $y = \frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{5}x^{-\frac{3}{4}}$, $y' = -\frac{3}{20\sqrt[4]{x^7}}.$
7. $y = (a + bx)(a - bx)$, $y' = -2b^2x.$
8. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$, $y' = -\frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{(x^3 - 1)^2}.$
9. $y = \frac{x^3 + ax^2 + ax + 1}{x + 1}.$ $y' = 2x + a - 1.$
10. $y = (2 + 3x)(8 + 7x)$, $y' = 38 + 42x.$
11. $y = (a + x^2)^3$, $y' = 6x(a + x^2)^2.$
12. $y = (6x^2 - \frac{1}{5}x^5)^4$, $y' = 4x(12 - x^3)(6 - \frac{1}{5}x^5)^3.$
13. $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1 - x)^3}$, $y' = -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{(1 - x)^4}.$
14. $y = \sqrt{1 + 5x}$, $y' = \frac{5}{2\sqrt{1 + 5x}}.$
15. $y = \sqrt[4]{(2x^2 - x^3)^3}$, $y' = \frac{3x(4 - 3x)}{4\sqrt[4]{2x^2 - x^3}}$,
16. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $y' = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$,
17. $y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x + x^2}$, $y' = \frac{1}{2x^2\sqrt{3x + x^2}}.$
18. $y = \frac{(8x^4 + 4x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 1}}{15x^5}$, $y' = \frac{1}{x^6\sqrt{x^2 - 1}}.$
19. $y = \ln(2 + 5x)$ $y' = \frac{5}{2 + 5x}.$
20. $y = \ln x^n$, $y' = \frac{n}{x}.$
21. $y = \ln\left(\frac{a}{a + x}\right)$, $y' = -\frac{1}{a + x}.$

22. $y = \ln \frac{x}{1-x^2}$, $\quad y' = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$.

23. $y = \frac{1}{x} \ln x$, $\quad y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

24. $y = x\sqrt{a^2+x^2} + \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$, $\quad y' = \frac{2x^2+a^2+1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

25. $y = \ln \frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\quad y' = \frac{(b^2-4ac)\,x}{2(2a+bx)(a+bx+cx^2)}$.

26. $y = e^x x^n$, $\quad y' = e^x x^{n-1}(x+n)$.

27. $y = a^{2x^3-3x^2}$ $\quad y' = 6x(x-1)\,a^{2x^3-3x^2}\ln a$.

28. $y = ae^{\frac{x}{a}}$, $\quad y' = e^{\frac{x}{a}}$.

29. $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, $\quad y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

30. $y = \ln(e^{mx}+e^{-mx})$, $\quad y' = \frac{m(e^{mx}-e^{-mx})}{e^{mx}+e^{-mx}}$.

31. $y = \sin 12x$, $\quad y' = 12\cos 12x$.

32. $y = \sin(px+q)$, $\quad y' = p\cos(px+q)$.

33. $y = x\cos x$, $\quad y' = \cos x - x\sin x$.

34. $y = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x$, $\quad y' = x^3\cos x$.

35. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2x$, $\quad y' = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

36. $y = x - \sin x\cos x$. $\quad y' = 2\sin^2 x$.

37. $y = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x$ $\quad y' = \frac{3}{\cos^4 x}$.

38. $y = \frac{\sin x}{a+b\cos x}$, $\quad y' = \frac{a\cos x+b}{(a+b\cos x)^2}$.

39. $y = \ln\sin x$, $\quad y' = \operatorname{ctg} x$.

40. $y = \ln\cos x$, $\quad y' = -\operatorname{tg} x$.

41. $y = \ln\operatorname{tg} x$, $\quad y' = \frac{2}{\sin 2x}$.

42. $y = \arcsin ax$, $\quad y' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$.

43. $y = \arccos(a-x)$, $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$.

44. $y = \operatorname{arctg} ax$, $\quad y' = \frac{a}{1+a^2x^2}$.

45. $y = x^3\arcsin\frac{1}{x}$, $\quad y' = x^2\left(3\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$.

46. $y = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$, $\quad y' = \frac{2}{1+x^2}$.

47. $y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$, $\quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

48. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $\quad y' = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

49. $y = \arccos\sqrt{1-x}$, $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

50. $y = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$, $\quad y' = x\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$.

51. $y = t^2+8t-1$, $x = t^5+2t$, $\quad y'_x = \frac{2t+8}{5t^4+2}$.

52. $y = \operatorname{arctg}(2t+1)$, $x = e^{-t^2}$, $\quad y'_x = \frac{-e^{t^2}}{2t(2t^2+2t+1)}$.

53. $y = a\sin t + b\cos t$. $x = 4\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}$, $\quad y'_x = \frac{(a\cos t - b\sin t)\cos^3\frac{t}{2}}{4\sin\frac{t}{2}}$.

54. $y = \arcsin(t^2-1)$, $x = \arccos 2t$, $\quad y'_x = -\sqrt{\frac{1-4t^2}{2-t^2}}$.

CAPITULO VI

TEOREMA DE ROLLE. TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO. FORMULA DE TAYLOR.

1. Teorema sobre el valor medio. Admitamos que la función $y = f(x)$ definida y continua en el intervalo $[a, b]$ tiene derivada en cada uno de los puntos interiores de este intervalo.

Tracemos la cuerda AB uniendo los puntos de la curva correspondientes a los extremos del intervalo $[a, b]$. Sea α el ángulo que forma la cuerda con el eje OX (Fig. 29). Es claro, intuitivamente, que existe sobre la curva un punto C por lo menos, diferente de A y B, en el que la tangente es paralela a la cuerda AB.

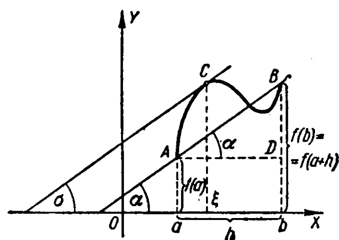


Fig. 29

Representemos por ξ la abscisa del punto C, por σ el ángulo que la tangente en este punto forma con el eje OX, y por h la longitud del intervalo $[a, b]$. En virtud de la observación hecha, tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \sigma, \tag{1}$$

y del triángulo ADB obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2}$$

Como $a < \xi < a + h = b$, entonces $\xi = a + \theta h$, donde θ es cierto número que satisface las desigualdades $0 < \theta < 1$. Observemos que

$$\operatorname{tg} \sigma = f'(\xi) = f'(a + \theta h),$$

de (1) y (2) obtenemos

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de Teorema sobre el valor medio y puede formularse de la siguiente manera.

Teorema. Si la función $y = f(x)$ es contínua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y tiene derivada en cada uno de los puntos interiores de este intervalo, entonces existe un número θ, que satisface las desigualdades $0 < \theta < 1$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'[a + \theta(b - a)].$$

2. Teorema de Rolle. Si en particular suponemos que la función tiene el mismo valor en los extremos del intervalo, entonces la cuerda AB es paralela al eje OX y por consiguiente la tangente en el punto C también es paralela al eje OX (Fig. 30); asímismo la derivada en el punto ξ es igual a cero. Por tanto podemos enunciar el siguiente

Teorema. Si una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y con derivada en todos los puntos interiores de este intervalo, adquiere valores iguales en los extremos del intervalo entonces cuando menos en un punto interior del intervalo $[a, b]$, la derivada es igual a cero.

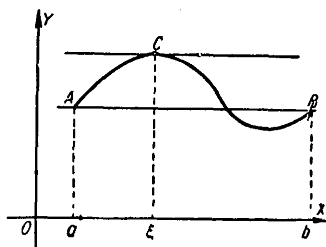


Fig. 30

Observación. En el teorema de Rolle no se presupone ni la existencia de las derivadas de la función en los extremos del intervalo $[a, b]$, ni la continuidad de la derivada donde quiera en el interior de $[a, b]$. La suposición sobre la existencia de la derivada en el interior de $[a, b]$ es esencial. Basta que en un punto del interior de $[a, b]$ no exista la derivada, para que no se anule en ningún punto del intervalo. Como ejemplo puede servir la función mostrada por la gráfica de la Fig. 31, que no tiene derivada solamente en un punto.

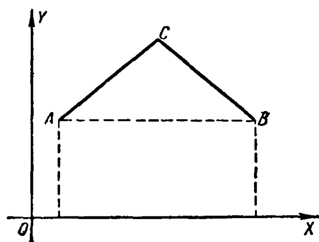


Fig. 31

El teorema de Rolle establece en forma absoluta que aunque solo sea en un punto interior, la derivada será igual a cero; por esta razón si la derivada fuera igual a cero en los extremos del intervalo, entonces, independientemente de ello, podría asegurarse que además en algún punto interior la derivada también es igual a cero.

El teorema de Rolle es uno de los teoremas principales del cálculo diferencial.

3. Demostración del teorema de Rolle. Si nuestra función adquiere en todo el intervalo $[a, b]$ un valor constante, entonces en todo punto interior del intervalo su derivada será igual a cero. Por consiguiente el teorema es cierto en este caso.

Aceptemos ahora que nuestra función no es constante. En virtud de que la función es continua en el intervalo cerrado adquiere un valor máximo y un valor mínimo (ver Pág. 61), puede afirmarse que solamente uno de estos valores es adquirido en un punto interior del intervalo $[a, b]$. Sea por ejemplo, que la función adquiere un valor máximo en el punto ξ $(a < \xi < b)$. Entonces para todo valor de h es válida la desigualdad

$$f(\xi + h) \leq f(\xi).$$

Como demostraremos ahora, el punto ξ es el punto que requeríamos es decir,

$$f'(\xi)=0.$$

Observemos que si:

1) $h>0$, entonces $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant 0$;

2) $h<0$, entonces $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\geqslant 0$.

Por esta razón, si h tiende a cero, adquiriendo valores positivos, entonces

$$f'(\xi)=\lim_{h\to+0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant 0.$$

Asimismo si h tiende a cero adquiriendo valores negativos, entonces

$$f'(\xi)=\lim_{h\to-0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\geqslant 0.$$

por consiguiente,

$$0\leqslant f'(\xi)\leqslant 0,$$

de donde

$$f'(\xi)=0,$$

con lo que se demuestra el teorema de Rolle. Análogamente se realiza la demostración en el caso en que en el punto ξ $(a<\xi<b)$ adquiera un valor mínimo.

4. Demostración del Teorema sobre el valor medio. Hagamos

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\omega \quad (1)$$

ó

$$f(a+h)-f(a)-h\omega=0.$$

Definimos una función $\varphi(t)$, en el segmento $0\leqslant t\leqslant h$, haciendo

$$\varphi(t)=f(a+t)-f(a)-t\omega;$$

vemos que:

$$\begin{aligned}&1)\ \varphi(0)=\varphi(h)=0;\\&2)\ \varphi'(t)=f'(a+t)-\omega.\end{aligned} \quad (2)$$

En virtud de ésto, según el teorema de Rolle, existe tal punto ξ $(0<\xi<h)$, que $\varphi'(\xi)=0$. Por consiguiente, de acuerdo con la fórmula (2) obtenemos:

$$\varphi'(\xi)=f'(a+\xi)-\omega=0,$$

de donde

$$\omega=f'(a+\xi).$$

Haciendo $\xi=\theta h\,(0<\theta<1)$, obtenemos con apoyo en (1)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h).$$

Hemos demostrado, por tanto, el teorema sobre el valor medio.

5. Consecuencias del teorema sobre el valor medio. Si una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, tiene derivada nula donde quiera en el interior, entonces tal función es constante en este intervalo.

Demostración. Sean x_0 y x_0+h dos puntos arbitrarios del intervalo $[a, b]$.. Según el teorema sobre el valor medio tenemos:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h).$$

Pero de la condición $f'(x_0+\theta h)=0$, se sigue que

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0,$$

ó

$$f(x_0+h)=f(x_0).$$

Así, la función tiene un valor constante en el intervalo $[a, b]$.

Teorema. Si una función continua tiene en todo el intervalo derivadas positivas (ó negativas) entonces es estrictamente creciente (ó decreciente) en este intervalo.

Demostración. Si x_0 y x_0+h $(h>0)$ son dos puntos arbitrarios del intervalo $[a, b]$, entonces por el teorema sobre el valor medio tenemos:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h).$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h);$$

como $h>0,\ f'(x_0+\theta h)>0,$ tendremos

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0,$$

por consiguiente,

$$f(x_0+h)>f(x_0).$$

Por tanto la función es estrictamente creciente.

Procedemos análogamente en el caso en que en todo el intervalo --- $[a, b]$ la derivada sea negativa.

6. Derivada de una función compuesta. Con ayuda del -- teorema sobre el valor medio, demostraremos ahora el teorema sobre - la derivada de una función compuesta, que presentamos antes (ver. Pág. 81) sin demostración.

Sea $y=f(\varphi(x))$ una función compuesta formada con las funciones $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, contínuas y que poseen derivadas contínuas. Representemos por Δx un incremento arbitrario de la variable x, y por Δu, Δy los co-- rrespondientes incrementos de las variables u, y.

Tendremos:

$$y+\Delta y=f(u+\Delta u),$$
$$y=f(u),$$

por consiguiente,

$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u).$$

Con base en el teorema sobre el valor medio podemos escribir la última igualdad en la siguiente forma:

$$\Delta y=f'(u+\theta\Delta u)\Delta u \qquad (0<\theta<1).$$

de donde:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u+\theta\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Si ahora Δx tiende a cero, entonces, vista la continuidad de la función $u=\varphi(x)$ el incremento Δu, vale decir $\theta\Delta u$, tiende a cero, y la expresión $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tiende á u'_x. Pasando al límite obtenemos,

$$y'_x=f'(u)\,u'_x.$$

7. Fórmula de Taylor. Supongamos que la función - $y=f(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$, tiene derivadas- hasta de orden n-1, inclusive, continuas también en este intervalo cerrado; respecto a la derivada enésima - aceptamos que existe en todos los puntos interiores - del intervalo (a, b). Si los puntos x y $x+h$ pertenecen al intervalo (a, b) tiene lugar la fórmula

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+$$
$$+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n(x, h),$$

que se llama fórmula de Taylor. $R_n(x, h)$ recibe el nombre de residuo de la fórmula de Taylor.

Usaremos dos expresiones diferentes para el residuo. Una de ellas es

$$R_n(x, h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

θ satisface la condición $0<\theta<1$, dada por Lagrange. La segunda expresión es

$$R_n(x, h)=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}f^{(n)}(x+\theta' h),$$

donde, nuevamente $0<\theta'<1$, propuesta por Cauchy.

Si en particular, el intervalo (a, b) contiene el número 0, entonces escribiendo, en la fórmula de Taylor, 0 en lugar de x y x en lugar de h, obtenemos la llamada fórmula de Maclaurin:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n(x);$$

$R_n(x)$ tiene la forma:

Residuo, en la forma de Lagrange

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1);$$

Residuo en la forma de Cauchy.

$$R_n(x)=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}f^{(n)}(\theta' x) \qquad (0<\theta'<1).$$

Observación. Ambos residuos (en la forma de Lagrange y de Cauchy) son, evidentemente, iguales entre sí y solamente difieren en la forma. Para investigar la fórmula de Taylor de una función dada se usa una u otra forma según convenga al caso considerado.

8. Demostración de la fórmula de Taylor. Sean α y β $(\alpha\neq\beta)$ dos puntos arbitrarios del intervalo (a, b) y p un número natural cualquiera $\geqslant 1$. Hagamos

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)-\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)-\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)-\ldots-\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha)}{(\beta-\alpha)^p}=\omega. \qquad (1)$$

Definimos la función $\varphi(t)$ de la siguiente manera:

$$\varphi(t)=f(\beta)-f(t)-\frac{\beta-t}{1!}f'(t)-\frac{(\beta-t)^2}{2!}f''(t)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(\beta-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)-\omega(\beta-t)^p.$$

Observamos que haciendo $t=\beta$, obtenemos $\varphi(\beta)=0$, y haciendo $t=\alpha$, obtenemos, en virtud de (1), $\varphi(\alpha)=0$.

Encontremos $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t)=-f'(t)-\frac{\beta-t}{1!}f''(t)+f'(t)-\frac{(\beta-t)^2}{2!}f'''(t)+$$

$$+\frac{\beta-t}{1!}f''(t)-\ldots-\frac{(\beta-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+$$
$$+\frac{(\beta-t)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(t)+\omega p(\beta-t)^{p-1},$$

ó después de simplificar

$$\varphi'(t)=\omega p(\beta-t)^{p-1}-\frac{(\beta-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t). \tag{2}$$

Como se demostró antes,

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0,$$

por lo que, en virtud del teorema de Rolle, existe un punto ξ, comprendido entre α y β, en el que la derivada de la función $\varphi(t)$ se anula. Así pues, de acuerdo con (2)

$$\varphi'(\xi)=\omega p(\beta-\xi)^{p-1}-\frac{(\beta-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)=0.$$

De donde

$$\omega=\frac{(\beta-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(\xi) \qquad (\alpha<\xi<\beta).$$

Substituyendo en (1) el valor de ω, obtenemos, después de una transformación:

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}(\alpha)+R_n, \tag{3}$$

donde

$$R_n=\frac{(\beta-\alpha)^p(\beta-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(\xi);$$

ξ es un número comprendido entre α y β, así que

$$\xi=\alpha+\theta(\beta-\alpha) \qquad (0<\theta<t).$$

Haciendo ahora $\beta=x+h,\ \alpha=x,$ encontramos:

$$\beta-\alpha=h,$$
$$\xi=x+\theta h,$$
$$\beta-\xi=h(1-\theta).$$

Substituyendo estas expresiones en la fórmula (3), obtenemos:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

donde

$$R_n=\frac{h^p h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

ó

$$R_n=\frac{h^n}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Como p es un número natural arbitrario $\geqslant 1$, entonces haciendo primero p=n, y después p=1, obtenemos el residuo correspondiente a la forma de Lagrange ó de Cauchy, respectivamente. Como en la fórmula anterior el número θ depende de p, entonces para p = n, y para p =1 obtenemos, en términos generales, diferentes valores de θ, por lo que el segundo de estos valores que aparece en la forma de Cauchy, lo representamos por θ'.

Ejemplos. 1. f(x) = e^x. Tenemos:

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x;$$

de donde

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1.$$

Aplicando la fórmula de Maclaurin, obtenemos;

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

Para $a>0$ al substituir en esta fórmula x por x ln a, obtenemos

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}\ln^{n-1}a}{(n-1)!}+\frac{x^n\ln^n a}{n!}a^{\theta x}.$$

2. f(x) = sen x. Tenemos:

$$f(0)=0,$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$ (ver Pág.99)

$$f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Así pues, si n = 2k, entonces

$$f^{(n)}(0)=f^{(2k)}(0)=\sin k\pi=0;$$

si n = 2k - 1, entonces

$$f^{(n)}(0)=f^{(2k-1)}(0)=\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{k+1},$$

por consiguiente, para n = 2k obtenemos:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+$$
$$+\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin(\theta x+k\pi),$$

y para n = 2k - 1

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} + \\ + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \sin\left(\theta x + \frac{2k-1}{2}\pi\right)$$

3. F(x) = cos x. Tenemos:

$$f(0) = 1,$$
$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(ver Pág 99)}$$
$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2}.$$

Además, para n = 2k obtenemos:

$$f^{(n)}(0) = f^{(2k)}(0) = (-1)^k;$$

y si n = 2k - 1, tendremos

$$f^{(n)}(0) = f^{(2k-1)}(0) = 0.$$

Por consiguiente, para n = 2k tendremos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos(\theta x + k\pi),$$

y para n = 2k - 1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\cos\left[\theta x + (2k-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

4. f(x) = ln (1 + x). Tenemos:

$$f(0) = 0,$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{(ver Pág.99)}$$

por consiguiente,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!,$$
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Así pues, obtenemos:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x),$$
$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = (-1)^{n+1}\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n}x^n.$$

5. $f(x) = (1+x)^p$ (p, arbitrario). Tomando en cuenta que

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\dots(p-n+1)(1+x)^{p-n} = \binom{p}{n} n!(1+x)^{p-n},$$

obtenemos:

$$f(0)=1,\ f^{(n)}(0)=\binom{p}{n} n!,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\binom{p}{n},$$

de donde

$$(1+x)^p = 1+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\binom{p}{3}x^3+\dots$$
$$\dots+\binom{p}{n-1}x^{n-1}+R_n(x),$$
$$R_n(x)=\binom{p}{n}(1+\theta x)^{p-n}x^n=\binom{p}{n}n(1-\theta')^{n-1}(1+\theta' x)^{p-n}x^n.$$

En las fórmulas anteriores, los números θ, θ' satisfacen las -- desigualdades:

$$0<\theta<1,\ \ 0<\theta'<1.$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que para el polinomio f(x), de grado n, tenemos:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

2. Como sabemos (Pág. 61) ejemplo 2, la ecuación $x = \cos x$ tiene, en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ por lo menos una raíz. Partiendo de que la- función $f(x) = x - \cos x$ tiene derivadas positivas en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, demostrar que en este intervalo no existe más de una raíz.

3. Demostrar que

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\dots+R_n(x),$$

$$R_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-3)}{2\cdot 4\dots 2n}:\frac{x^n}{(1+\theta x)^{n-\frac{1}{2}}}=\qquad(0<\theta<1)$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\dots 2(n-1)}\cdot\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^{n-\frac{1}{2}}}x^n\qquad(0<\theta'<1).$$

4. Con apoyo en el problema anterior, demostrar, que para $0\leqslant x \leqslant 0{,}01$ es válida la igualdad aproximada.

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$$

con un error menor que $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10^4}$, por consiguiente, exacta hasta la cuarta cifra decimal. Por ejemplo, $\sqrt{1{,}0046}=1{,}0023$.

9. Convexidad. Se dice que la curva, gráfica de la función --

$y = f(x)$, es convexa hacia arriba, en el punto $x = x_0$, si existe tal vecindad del punto x_0 que para todo punto $x_0 + h$ de esta vecindad tiene lugar la desigualdad

$$f(x_0+h)<f(x_0)+hf'(x_0).$$

Geométricamente esta desigualdad significa que la parte de la curva, correspondiente a esta vecindad está abajo de la tangente, trazada en el punto $x = x_0$, (Fig. 32).

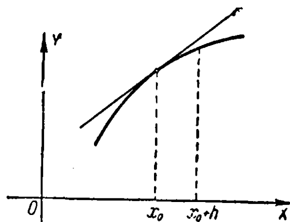


Fig. 32.

Análogamente definimos el sentido de la convexidad hacia abajo.

Mediante el teorema de Taylor se puede demostrar, fácilmente, la siguiente proposición:

Teorema. Si la función continua $y = f(x)$ tiene en todos los puntos interiores del intervalo (a, b) derivadas segundas negativas (ó positivas), entonces en cada uno de los puntos de este intervalo la gráfica de esta función es convexa hacia arriba (ó hacia abajo).

Demostración. Si x_0 y x_0+h $(h \neq 0)$ están en el interior del intervalo (a, b), entonces en virtud de la fórmula de Taylor tenemos:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h) \quad (0<\theta<1),$$

y como $h^2>0$, entonces

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)>0 \text{ при } f''(x)>0,$$
$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)<0 \text{ при } f''(x)<0.$$

Ejemplos.

1. $y=x^3-ax^2+bx+c \quad (a>0), \; y''=6x-2a.$

Así pues, para $x>\frac{a}{3}$ la curva es convexa hacia abajo, puesto que aquí la segunda derivada es positiva.

2. $y=\sin x, \; y''=-\sin x.$

Si $y>0$, entonces $y''<0$, por consiguiente, sobre el eje OX, la sinusoide es convexa hacia arriba.

3. $y=x^4-6x^3+12x^2,$

$$y''=12x^2-36x+24=12(x-1)(x-2).$$

La curva, por consiguiente, es convexa hacia abajo para $x<1$, convexa hacia arriba para $1<x<2$, hacia abajo para $x>2$.

CAPITULO VII

MAXIMOS Y MINIMOS. PUNTOS DE INFLEXION. EXPRESIONES INDETERMINADAS.

VALOR EXTREMO. PUNTOS DE INFLEXION.

1. Definición de Valor Extremo. Se dice que una función tiene un máximo en cierto punto (Fig. 33) si los valores de la función en la vecindad del punto dado no exceden los valores de la función en este punto.

Análogamente se define el mínimo. (Fig. 34).

Si en cierto punto la función tiene un máximo o un mínimo, entonces se dice que en este punto tiene lugar un valor extremo.

De las definiciones anteriores se deduce que si en un punto $x=x_0$, la función $y = f(x)$ tiene un valor extremo, entonces para todo h, menor en valor absoluto a cierto $\varepsilon>0$, se tendrá:

$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0$ si tiene lugar un máximo; (1)

$f(x_0+h)-f(x_0)\geqslant 0$ si tiene lugar un mínimo. (2)

Así, en ambos casos la diferencia $f(x_0+h)-f(x_0)$ no cambia de signo para valores de h suficientemente pequeños.

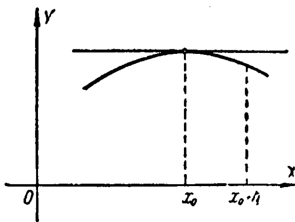


Fig. 33

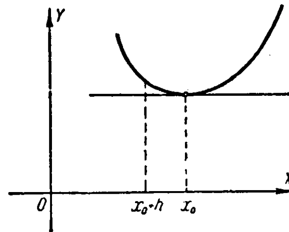


Fig. 34

Observación. Si en cierto punto x_0, para todo $h\neq 0$, que satisface la condición $|h|<\varepsilon$, tenemos :

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0,$$

diremos que en este punto tiene lugar un máximo propio.

De la misma manera se define el mínimo propio.

Procede advertir que el máximo no es necesariamente el valor más grande que adquiere la función. Fuera de la vecindad considerada la función puede adquirir valores mayores (Fig. 35).

Es claro también que la función puede tener varios máximos y mínimos. Por ejemplo, la función $y=\sin\frac{1}{x}$ adquiere un número de veces el valor

máximo igual a la unidad para

$$x=\frac{2}{\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \ldots,\ \frac{2}{(4n+1)\pi}$$

2. Condición Necesaria para la Existencia de los Valores Extremos. Si la función $y = f(x)$ tiene un valor extremo para $x=x_0$, entonces la derivada en este punto, si existe, es igual a cero. En otras palabras, la tangente en el punto del valor extremo (si existe) es paralela al eje OX.

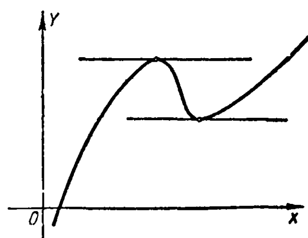


Fig. 35

Sea que para $x=x_0$ la función tiene un máximo. Suponiendo que existe $f'(x_0)$, obtenemos:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Pero en virtud de (1) para h positivos suficientemente pequeños, tenemos:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0,$$

por consiguiente,

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0$$

ó

$$f'(x_0)\leqslant 0. \qquad (3)$$

Análogamente, para h negativos, suficientemente pequeños, obtenemos:

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0,$$

por consiguiente,

$$f'(x_0)\geqslant 0. \qquad (4)$$

De las desigualdades (3) y (4) se deduce

$$f'(x_0)=0.$$

Observación. No debe pensarse que si en cierto punto la derivada es nula, entonces en ese punto siempre tendrá lugar un valor máximo. Por ejemplo, la función $y=x^3$ cuya derivada $y'=3x^2$ es igual a cero para $x = 0$, no tiene valor extremo en el punto $x = 0$, ya que:

$$y<0 \text{ para } x<0$$
$$y=0 \text{ para } x=0$$
$$y>0 \text{ para } x>0.$$

Sea que la función $y = f(x)$ tiene derivada en todos los puntos interiores

del intervalo (a, b.). Del teorema demostrado se deduce que si nuestra función tiene en el interior del intervalo (a, b) puntos de valores extremos, entonces ellos se encuentran entre aquellos puntos en los que la derivada se anula. Por ello basta determinar todos los valores de x del intervalo (a, b) para los cuales f '(x) = 0 e investigar en cuáles de éstos se tienen valores extremos. El estudio de los valores restantes de x del intervalo (a, b) pierde importancia.

Ejemplo. ¿ Para qué valores de x, la función

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$$

puede tener valores extremos?

Encontremos la primera derivada:

$$y'=x^3-2x^2-3x.$$

Como es fácil ver, la ecuación

$$y'=0,$$

esto es

$$x^3-2x^2-3x=0,$$

tiene solamente tres raíces:

$$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=-1.$$

por consiguiente la función dada puede tener valores extremos para x = 0, 3, -1.

3. Condición Suficiente para la Existencia de Valores Extremos. El siguiente teorema nos permite, en muchos casos decidir si en cierto punto tiene lugar un máximo o un mínimo.

Teorema. Si la función y = f (x) tiene en la vecindad del punto $x=x_0$, derivadas primera y segunda continuas y si $f'(x_0)=0$, entonces para $x=x_0$ tiene lugar un máximo propio si $f''(x_0)<0$ y un mínimo propio si $f''(x_0)>0$.

Si $f''(x_0)=0$ entonces no es posible sacar ningunas conclusiones si una investigación posterior.

Demostración.- Según la fórmula de Taylor tenemos:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)\quad(0<\theta<1).$$

Como según la condición

$$f'(x_0)=0,$$

entonces

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h).$$

Si aceptamos ahora que $f''(x_0)<0$, entonces por efecto de la continuidad de la segunda derivada, existe necesariamente cierta vecindad del punto $x=x_0$ en la que $f''(x)<0$.

Es evidente que si x_0+h $(h\neq 0)$ pertenece a esta vecindad, entonces

$$f''(x_0+\theta h)<0.$$

Así pues, por cuanto $h^2>0$, obtenemos:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)<0;$$

por consiguiente, para $x=x_0$ tiene lugar un máximo propio.

Aceptando que $f''(x_0)>0$, demostramos análogamente que para $x=x_0$ tiene lugar un mínimo propio.

Ejemplo. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2.$$

La primera derivada es cero para x = 0, 3, -1. Encontremos la segunda derivada:

$$y''=3x^2-4x-3.$$

Así pues,

$f''(0)=-3<0$, por consiguiente, para x = 0 tenemos el máximo: y = 2;

$f''(3)=12>0$, por consiguiente, para x = 3 tenemos el mínimo: y = $-9\frac{1}{4}$;

$f''(-1)=4>0$, por consiguiente, para x = - 1 tenemos el mínimo: $y=1\frac{5}{12}$.

4. Condición Suficiente General. En caso de duda, cuando $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)=0$, puede usarse la siguiente proposición más general:

Teorema. Si la función y = f (x) tiene en la vecindad del punto $x=x_0$, derivadas continuas hasta de orden $(n>1)$, inclusive y si

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

además

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

entonces, para n impar, la función no tiene valores extremos en el punto $x=x_0$ y para n par la función tiene

un máximo propio cuando $f^{(n)}(x_0)<0$, y un mínimo propio cuando $f^{(n)}(x_0)>0$.

Demostración. Al cumplirse las condiciones del teorema, la fórmula de Taylor adquiere la forma

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h) \quad (0<\theta<1).$$

Para n par, la demostración se lleva a cabo como en el teorema anterior.

Admitamos ahora que n sea un número impar, y sea $f^{(n)}(x_0)>0$.

Es fácil ver que existe una vecindad del punto $x=x_0$ en la que $f^{(n)}(x)>0$.

Para valores suficientemente pequenos y positivos de h obtenemos, por esta razón:

$$f^{(n)}(x_0+\theta h)>0, \quad h^n>0,$$

por consiguiente,

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0,$$

de donde

$$f(x_0+h)>f(x_0).$$

Para valores negativos de h, suficientemente pequeños en valor absoluto, tendremos:

$$f^{(n)}(x_0+\theta h)>0, \quad h^n<0,$$

así que

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0,$$

por lo que

$$f(x_0+h)<f(x_0).$$

De suerte que en una vecindad arbitraria del punto x_0 existen valores mayores y menores que $f(x_0)$. Esto significa que en el punto $x=x_0$ no se tiene un valor extremo.

Procederemos análogamente cuando $f^{(n)}(x)<0$.

Ejemplos.

1. $$\begin{aligned} y&=x^3-6x^2+12x-3,\\ y'&=3x^2-12x+12,\\ y''&=6x-12,\\ y'''&=6. \end{aligned}$$

Para determinar los valores extremos resolvemos la ecuación $y'=0$, es decir

$$3x^2-12x+12=0.$$

Obtenemos la raíz x = 2. Como para x = 2 la segunda derivada es igual a cero y la tercera derivada es positiva, entonces para x = 2 no existe un valor extremo.

2.
$$y=\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2},$$
$$y'=\frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3},$$
$$y''=\frac{6(x+3)}{(x+2)^4},$$
$$y'''=-\frac{6(3x+10)}{(x+2)^5}.$$

Las raíces de la ecuación $y'=0$ serán $x_1=0,\ x_2=-3$. Para el primero de estos valores la segunda derivada es positiva y para el segundo, nula. Para $x_1=0$ tenemos, por consiguiente, un mínimo. Substituyendo x_2 en la tercera derivada obtenemos $y'''=6\neq 0$. En el punto $x_2=-3$ no se tiene valor extremo.

3.
$$y=x^4(x-1)^3+1,$$
$$y'=x^3(x-1)^2(7x-4).$$

La derivada es nula en los puntos

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=\frac{4}{7};$$
$$y''=x^2(x-1)(42x^2-48x+12),$$
$$f''(x_1)=0,\ f''(x_2)=0,\ f''(x_3)>0,$$

por consiguiente, para $x=\frac{4}{7}$ tenemos un mínimo. Además

$$y'''=x[(3x-2)\varphi(x)+x(x-1)\varphi'(x)],$$

donde $\varphi(x)=42x^2-48x+12$, por consiguiente

$$f'''(x_1)=0,\ f'''(x_2)=\varphi(1)=6$$

esto es, para $x=x_2=1$ no se tienen valores extremos.

Haciendo

$$(3x-2)\varphi(x)+x(x-1)\varphi'(x)=\phi(x).$$

obtenemos

$$y^{(4)}=\psi(x)+x\psi'(x),$$

por consiguiente,

$$f^{(4)}(x_1)=\psi(0)=-2\varphi(0)=-24<0,$$

esto es, para $x=x_1=0$ tiene lugar un máximo.

4. $y=\frac{x^2-2x-21}{6x+14}$, $y'=\frac{6x^2+28x+98}{(6x+14)^2}$.

En este ejemplo la primera derivada no es nula para ningún valor de x, permaneciendo positiva en todo tiempo. Por consiguiente, la función no tiene valores extremos en ningún punto y en todo tiempo es creciente.

5. Punto de Inflexión. Se dice que el punto $x=x_0$ es, para la función y = f (x), un punto de inflexión, si para valores suficientemente pequeños de h la expresión

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) \qquad (1)$$

cambia de signo simultáneamente con el cambio de signo de h, ó en otras palabras, si existe un número $\varepsilon>0$ tal que la expresión (1) sea constantemente positiva para $\varepsilon>h>0$ y negativa para $-\varepsilon<h<0$; ó constantemente negativa para $\varepsilon>h>0$ y constantemente positiva para $-\varepsilon<h<0$

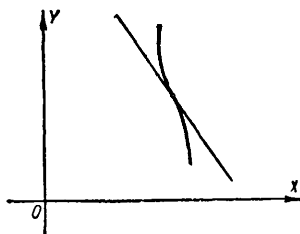


Fig. 36

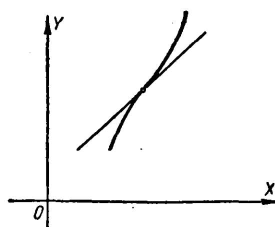


Fig. 37

Geométricamente esto significa que la parte de la curva correspondiente a un h positivo, está del lado opuesto de la tangente (construída en el punto correspondiente al valor $x=x_0$) respecto a la parte de la curva correspondiente a un h negativo (Figs. 36 y 37).

Aplicando el teorema sobre el valor medio, obtenemos:

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=hf'(x_0+\theta h)-hf'(x_0)=$$
$$=h[f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)] \qquad (0<\theta<1).$$

Supongamos que la primera derivada tiene, en el punto x_0 , un máximo propio: la expresión $f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)$ para valores suficientemente peque-

ños de h (diferentes de cero) tendrá el mismo signo. Por lo que la expresión

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=h[f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)]$$

cambiará de signo simultáneamente con el cambio de signo de h. En virtud de la definición, el punto x_0 es un punto de inflexión. Hemos demostrado, por tanto, la siguiente proposición:

Teorema. Si la primera derivada de la función y = f (x) tiene, para $x=x_0$ un extremo propio, entonces el punto $x=x_0$ es un punto de inflexión de la función y = f (x).

Así pues, determinando los puntos en los que la primera derivada tiene un valor extremo, obtenemos los puntos de inflexión de la función y = f (x). (En la práctica, en general son todos los puntos)

El teorema inverso sin embargo, no es verdadero. Puede suceder por ejemplo, que el punto x_0 sea un punto de inflexión y para los puntos $x\neq x_0$ no exista la derivada, así que no se puede decir nada sobre los valores extremos de la derivada en el punto x_0

Con apoyo en los correspondientes teoremas sobre los valores extremos de una función podemos establecer las condiciones suficientes para los puntos de inflexión.

1) Si la función y = f (x) tiene, en la vecindad de un punto x_0 derivadas continuas hasta de orden $(n\geqslant 2)$ inclusive y si

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

y si entonces para un n par, el punto $x=x_0$ no es un punto de inflexión y para un n impar, el punto $x=x_0$ es un punto de inflexión.

2) En particular, $x=x_0$ es un punto de inflexión si $f''(x_0)=0$ y $f'''(x_0)\neq 0$.

Ejemplos.

1) $y=x^3-6x^2+2x-1,$
$y'=3x^2-12x+2,$
$y''=6x-12,$
$y'''=6.$

La segunda derivada es nula para x = 2. Como la tercera derivada es diferente de cero, entonces para x = 2 tenemos un punto de inflexión.

2. $y=x^3\left(x^2-5x+\frac{20}{3}\right)$,
$y'=5x^2(x^2-4x+4)$,
$y''=20x(x^2-3x+2)$,
$y'''=20(3x^2-6x+2)$.

La segunda derivada tiene las raíces $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$.

Como para estos valores la tercera derivada es diferente de cero, entonces estos puntos son puntos de inflexión.

6. Valores Extremos de Funciones dadas Paramétricamente. Sean dadas las dos funciones

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),$$

continuas en cierto intervalo $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ y con derivadas, primera y segunda, continuas en ese intervalo. Admitamos además que la función $x = f(t)$ es estrictamente monótona en el intervalo. Luego las ecuaciones antes escritas definen á y como una función de la variable x (ver Pág. 101). Las derivadas de esta función se dan por las fórmulas

$$y'_x=\frac{\varphi'(t)}{f'(t)},$$
$$y''_x=\frac{f'(t)\varphi''(t)-f''(t)\varphi'(t)}{[f'(t)]^3}$$

(bajo la condición de que en el punto considerado $f'(t)\neq 0$).

Para determinar los valores extremos de esta función procedemos igual que antes. A saber, encontramos inicialmente los puntos en los que $y'_x=0$ esto es, en los que

$$\varphi'(t)=0,\quad f'(t)\neq 0.$$

Si t_0 es tal punto, entonces, tomando en cuenta que $\varphi'(t_0)=0$ para la segunda derivada y''_x , obtenemos la fórmula

$$y''_x=\frac{\varphi''(t_0)}{[f'(t_0)]^2}.$$

Así pues, tiene lugar un mínimo cuando $\varphi''(t_0)>0$, y un máximo cuando $\varphi''(t_0)<0$. Si $\varphi''(t)=0$, será necesario investigar las derivadas de orden superior. Los puntos en los que $f'(t)=0$ requieren un estudio especial.

Ejemplos.

1. $x=r\cos t,\ y=\frac{1}{4}r\sin 2t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi,\ r>0.$

$$\frac{dx}{dt}=-r\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}r\cos 2t,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-r\cos t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-r\sin 2t.$$

Para $t \neq 0$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2t}{\sin t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t}{2r(\sin t)^3}.$$

El numerador de la primera derivada tiene una raíz $t = \frac{\pi}{4}$ para la cual no se anula el denominador. Para $t = \frac{\pi}{4}$, la segunda derivada adquiere el valor

$$-\frac{1}{r\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2} < 0.$$

Así pues, para $t = \frac{\pi}{4}$ tiene lugar un máximo propio.

2. $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 - 2t - 1.$

$$\frac{dx}{dt} = 4t^3, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 12t^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t.$$

Por consiguiente, para $t \neq 0$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 2}{4t^3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t^3 \cdot 6t - (3t^2 - 2)\,12t^2}{64t^9}.$$

El numerador de la primera derivada tiene una raíz $t_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, y otra $= -\sqrt{\frac{2}{3}}$ para las cuales el denominador no se anula. Substituyendo estas raíces en la expresión de la segunda derivada obtenemos, para $t = t_1$ un valor positivo, y para $t = t_2$ un valor negativo. Por lo tanto, para $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ tendremos un mínimo y para $t = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ un máximo.

PROBLEMAS

Encontrar los puntos de los valores extremos de las funciones:

1. $y = x(a - x)^2 \quad (a > 0)$; max para $x = \frac{a}{3}$, min para $x = a$.

2. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; max para $x = 2$, min para $x = 1, 3$;

3. $y = \frac{2^x}{x}$; min para $x = \frac{1}{\ln 2}$.

4. $y = x^x$; min para $x = \frac{1}{e}$.

5. $y=e^{x}\sin x$; en los puntos $x=\left(n+\frac{3}{4}\right)\pi$ (máx. para valores pares de n; min para valores impares de n).

6. Inscribir el cono de mayor volúmen en una esfera de radio r. (La distancia de la base al centro de la esfera será igual a r/3).

7. Demostrar que de todos los triángulos de base y perímetros dados, el isósceles es el de mayor área.

8. Encontrar el punto cuya suma de los cuadrados de las distancias a los vértices de un triángulo tiene un valor mínimo. (El centro de gravedad del triángulo).

9. Demostrar que la cuerda más corta de la parábola $y^2=2px$, que la corta forman do un ángulo recto, tiene una longitud $3p\sqrt{3}$.

10. Inscribir en una esfera: a) un cilindro; b) un cono de áreas máximas.

(La altura del cilindro es igual $r\sqrt{2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ y la del cono $\frac{r}{16}(23-\sqrt{17})$

Encontrar los puntos de valores extremos de las funciones dadas paramétricamente.

11. $y=t^2+8t-1,$
$x=t^3+2t,$

Mín. para t = -4.

12. $y=\operatorname{arctg}(2t+1),$
$x=e-t^2.$

No tiene valores extremos.

EXPRESIONES INDETERMINADAS

(ELIMINACION DE LAS INDETERMINADAS)

7. Indeterminaciones de la Forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ Nos ocuparemos ahora del estudio del límite de la relación $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ en el caso en que el numerador y el denominador tiendan a cero o al infinito. Estos casos se representarán respectivamente por los símbolos $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema. Sean las funciones f(x), g(x) con derivadas primeras en la vecindad del punto x=a (con exclusión, posiblemente del punto a) que satisfacen las relaciones

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Si existe el límite $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe también el límite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y

tiene lugar la igualdad

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación. Además admitimos implícitamente que las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ no se anulan en ninguna parte de la vecindad del punto a, con exclusión quizá del propio punto a.

Demostración Sea x diferente de a. Hagamos

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\omega \qquad (1)$$

y definamos la función $\varphi(t)$ de la variable t, haciendo

$$\varphi(t)=f(t)-\omega g(t).$$

Es fácil ver que $\varphi(a)=\varphi(x)=0$. Por lo que, en virtud del Teorema de Rolle, existe tal punto ξ, comprendido entre a y x (diferente de a), que $\varphi'(\xi)=0$. Como $\varphi'(t)=f'(t)-\omega g'(t)$, entonces $\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\omega g'(\xi)$,

por consiguiente,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\omega=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \qquad (2)$$

Observemos que si x tiende hacia a, entonces ξ tiende á a. Así pues, suponiendo la existencia del límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, de la relación (2) establecemos la existencia del límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y la validez de la igualdad.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplos.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-3}=-1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{k\cos kx}{1}=k.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ae^{ax}}{1}=a.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^4}{3x^2}=\frac{5}{3}.$

Observación. Si resulta que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$, entonces, como es fácil ver de la demostración $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$.

Ejemplos.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2}=+\infty.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}=+\infty.$

Teorema. Sea que las funciones f (x), g (x) tiene primeras derivadas donde quiera, en la vecindad del punto x = a (con la posible exclusión del propio punto a) y que satisfacen las relaciones

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty;$$

entonces, si existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (o si es igual $\pm\infty$), existirá también el límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ (o será igual a $\pm\infty$) tendrá lugar la igualdad

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como la demostración de este teorema es más difícil la omitiremos.

Ejemplos.

7.

8.

7. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}(-x)=0.$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}=$

$$=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin 5x}{3\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}.$$

Observación. Si resulta que $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=0$ (respectivamente $\pm\infty$) entonces la investigación del límite de la relación $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ con base en los mismos teoremas puede reducirse a la investigación del límite de la relación $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ Como es fácil ver, esto puede generalizarse.

Ejemplos.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2-2ax+a}{bx^2-2bx+b}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2ax-2a}{2bx-2b}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}=\infty.$

Nuestros teoremas son válidos siempre y cuando x tienda á ∞, y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ (o $\pm\infty$). En este caso se supone que para todo x, mayor que cualquier número A, las funciones f (x) y g (x) tienen derivada.

Ejemplos.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1.$

8. Formas indeterminadas $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, entonces la investigación del límite del producto $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ se reduce a la investigación de los límites $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ó $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, que son, correspondientemente, indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, entonces la investigación del límite de la diferencia $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ se reduce a la investigación del $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$, que es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Ejemplos.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\frac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-x^2-1}{(x^2-1)(x-1)}=-\frac{1}{2}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=0.$

Las indeterminaciones de la forma 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} se reducen a indeterminaciones de la forma $0\cdot\infty$ con ayuda de la identidad

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Para ello se supondrá que $f(x)>0$.

Ejemplos.

6. $\lim\limits_{x\to +0} x^{x}=\lim\limits_{x\to +0} e^{x\ln x};$

$\lim\limits_{x\to +0} x\ln x=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0,$

por consiguiente,

$$\lim_{x\to +0} x^{x}=e^{0}=1.$$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x};$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0,$

así pues,

8. $$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1.$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}=m,$

por tanto

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=e^{m}.$$

PROBLEMAS

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x}=\ln\frac{a}{b}.$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{3}{8}}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}=\frac{1}{6}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^{2}}-\frac{1}{2x\,\mathrm{tg}\,x}\right)=\frac{1}{6}.$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}=1$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x=\dfrac{2}{\pi}$.

8. $\lim\limits_{x\to +0} x^n \ln x=0 \quad (n>0)$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=1$.

11. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{\frac{1}{2}h^2}=f''(a)$.

12. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$.

CAPITULO VIII

SERIES

SERIES CON TERMINOS CONSTANTES

1. Definición de Serie. Series Convergentes. Sea dada la secuencia de números $\{a_n\}$. Hagamos

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Si la secuencia $\{s_n\}$ tiene un límite S, entonces simbólicamente escribimos esto así:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

ó

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

La expresión que se encuentra en el miembro derecho de estas dos igualdades se llama serie y $\{s_n\}$ es la secuencia de sus sumas parciales. El número S se llama suma de la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Se dice también que la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

converge á S. Los números

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

se llaman términos de la serie.

Una serie que no es convergente se dice que es divergente.

Ejemplos.

1. $a_n = aq^{n-1}$, $|q| < 1$ (serie geométrica). Como es sabido (ver Introducción Par. 4):

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Como $|q| < 1$, entonces (Pág. 29) $\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q},$$

esto es

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots,$$

ó

$$\frac{a}{1-q}=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad |q|<1.$$

Por ejemplo,

$$1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots,$$

ó

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;

por consiguiente,

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

esto es,

$$s_n=1-\frac{1}{n+1},$$

de donde

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n=1;$$

Así pues,

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

2. Límite de una Secuencia Convergente como la Suma de una Serie. Sea $\lim_{n\to\infty} b_n=g$ Entonces, haciendo

$$a_1=b_1,$$
$$a_n=b_n-b_{n-1}, \quad n=2, 3, \ldots,$$

obtenemos:

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=$$
$$=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\ldots+(b_n-b_{n-1}),$$

por consiguiente,

$$s_n=b_n,$$

así que

$$\lim_{n\to\infty} s_n=g$$

ó

$$g=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=b_1+\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n).$$

Por ejemplo, si

$$b_n=\frac{2n+1}{3n-1},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{2}{3};$$

por consiguiente,

$$\frac{2}{3}=b_1+\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-5}{9n^2+3n-2}.$$

3. Condición Necesaria de Convergencia. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Esto resulta evidente si observamos que

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Efectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

La aplicación de esta condición permite, a menudo, comprobar la divergencia de alguna serie. Por ejemplo, sabemos que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ es divergente para $a \neq 0$ y $|q| \geqslant 1$, porque

$$|a_n| = |a| \cdot |q^{n-1}| \geqslant |a|.$$

No debe, sin embargo, pensarse que puede sacarse una conclusión inversa: cuando $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Como réplica puede servir la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

Sin embargo, por otra parte,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

por consiguiente,

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

ó

$$s_n = \ln(n+1).$$

Así pues, la secuencia s_n tiende á $+\infty$, por consiguiente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ es divergente.

Otro ejemplo de serie divergente con términos que tienden a cero es la llamada serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Efectivamente, si esta serie fuera convergente, entonces representando su suma por S, tendríamos

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_n = S - S = 0.$$

Pero

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

La primera parte decrece si cada uno de sus términos se substituye por $\frac{1}{2n}$. De aquí $s_{2n} - s_n > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. De donde se concluye que no es posible la igualdad $\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$.

4. Series Acotadas. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es acotada si la secuencia $\{s_n\}$ de sus sumas parciales es acotada.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, esto es, si la secuencia $\{s_n\}$ es convergente, entonces esta secuencia es acotada (ver el teorema de la Pág. 25). Esto significa que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es acotada, así que toda serie convergente es acotada.

No podemos, sin embargo, afirmar su recíproca. Lo que podríamos replicar con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-\dots$$

Aquí tenemos:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -1, \quad s_4 = 0, \dots, s_n = \frac{-1+(-1)^n}{2}.$$

Por consiguiente, vemos que

$$|s_n| \leq 1.$$

No obstante, la secuencia s_n no tiene límite, esto es, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ es divergente.

Sobre una serie acotada, de términos no-negativos, podemos establecer el siguiente teorema:

Una serie acotada con términos no-negativos es convergente.

La demostración puede hacerse de inmediato. Es suficiente con observar que por las condiciones antes mencionadas la secuencia $\{s_n\}$ es no-decreciente y acotada, en virtud de lo cual se concluye su convergencia (ver Pág. 24).

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}(s>1)$ es convergente. Efectivamente, según el teorema sobre el valor medio tenemos:

$$(x+h)^{-s+1} - x^{-s+1} = (-s+1)\,h\,(x+\theta h)^{-s};$$

haciendo x = n, h = -1, obtenemos para $n>1$

$$\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} = (s-1)\frac{1}{(n-\theta)^s}.$$

Como

$$0<\theta<1,$$

entonces,

$$\frac{1}{(n-\theta)^s} > \frac{1}{n^s}.$$

por consiguiente,

$$\frac{1}{n^s} < \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right).$$

Así pues,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{1^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{3^{s-1}}\right) + \dots + \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right),$$

de donde

$$s_n < 1 + \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right).$$

Como $s > 1$, entonces $\frac{1}{n^{s-1}} < 1$, por consiguiente,

$$s_n < 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

De donde se ve que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 1)$ con términos positivos es acotada, y por tanto, convergente.

5. Series Absolutamente Convergentes. Se dice que una serie es absolutamente (o incondicionalmente) convergente, si otra serie formada con las magnitudes absolutas de los términos de la primera es convergente.

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ es absolutamente convergente ya que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

es convergente.

Teorema. Una serie absolutamente convergente es convergente en sentido ordinario. Su suma se obtiene sumando la suma de sus términos positivos con la suma de sus términos negativos.

Observación. Llamaremos suma de los términos positivos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (si existe) a la suma de la serie obtenida de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ al substituir por cero los términos negativos. Similarmente definimos la suma de los términos negativos.

Nuestro teorema afirma que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces representando por T la suma de sus términos positivos y por W la suma de términos negativos, obtenemos:

$$S = T + W.$$

Demostración. Representemos por t_n (w_n , correspondientemente) la enésima suma parcial de la serie de términos positivos (negativos, respectivamente). Es claro que las secuencias $\{t_n\}$ y $\{w_n\}$ son monótonas y acotadas, ya que

$$|t_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$
$$|w_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Por lo tanto las secuencias $\{t_n\}$ y $\{w_n\}$ son convergentes. Hagamos

$$T = \lim_{n\to\infty} t_n,$$
$$W = \lim_{n\to\infty} w_n;$$

T es, por consiguiente, la suma de los términos positivos y W la suma de los negativos. Observemos ahora que

$$s_n = t_n + w_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n + \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Así pues,

$$S = T + W,$$

Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma es igual a la suma de los términos positivos, adicionada con la suma de sus términos negativos.

6. Independencia de la Suma de una Serie respecto al Orden de los Términos.

Teorema. La suma de una serie absolutamente convergente no depende del orden de sus términos.

Observación. Análogamente a lo dicho antes (Pág.13) para las secuencias, se dice que dos series difieren solamente por el orden de sus tér-- minos, si cada término aparece el mismo número (finito o infinito) de veces en ambas series.

Demostración. Representemos por s'_n la suma de los n primeros términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, obtenida de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alterando el orden de sus términos.

Aceptemos inicialmente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ está formada solamente -- por términos no-negativos. Elijamos un número entero arbitrario m. Puesto que todos los términos de la suma s'_m pertenecen a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, Puede encontrarse un número N tal que la suma s_N contenga todos los -- términos s'_m (y quizá, aún otros).

De suerte que

$$s'_m \leqslant s_N.$$

Pero

$$s_N \leqslant S,$$

esto es,

$$s'_m \leqslant S. \tag{1}$$

Así pues, la secuencia $\{s'_m\}$ en no-decreciente y acotada, por consiguiente, convergente. Haciendo

$$S' = \lim_{n \to \infty} s'_n,$$

obtenemos, de acuerdo con (1)

$$S' \leqslant S. \tag{2}$$

Procediendo análogamente, podemos demostrar que

$$S' \geqslant S. \tag{3}$$

Efectivamente, podemos considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como obtenida de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ al alterar el orden de sus términos.

De las desigualdades (2) y (3) obtenemos:

$$S'=S.$$

De manera análoga se procederá cuando los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sean no-positivos.

Pasemos ahora al caso general (esto es, se desistirá de suponer que los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tienen el mismo signo). Observemos que las series que se obtienen de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ al substituir sus términos negativos (o positivos) por ceros diferirán solamente en el orden de sus términos, y por consiguiente y en virtud de lo demostrado, tendrán la misma suma. Así pues, en ambas series las sumas de los términos negativos serán respectivamente iguales, ya que (a causa del teorema anterior) ambas series tienen las mismas sumas.

7. Series Condicionalmente Convergentes. Las series convergentes no absolutamente convergentes se llaman condicionalmente convergentes.

Ejemplo. La serie

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\ldots$$

es convergente, ya que

$$s_1=1,\quad s_2=0,\quad s_3=\frac{1}{2},\quad s_4=0,\ldots,\quad s_{2n}=0,\quad s_{2n+1}=\frac{1}{n+1},$$

por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} s_n=0.$$

Sin embargo esta serie no es absolutamente convergente, ya que la serie

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots$$

es divergente. Efectivamente, tenemos:

$$s_{2n}=2\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}.$$

Ya que la expresión encerrada en el paréntesis es la enésima suma de la serie armónica (ver Pág. 139), entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=\infty.$$

Observación. Se puede demostrar que cualquier serie condicionalmente convergente puede ser transformada en una serie que converge a un número arbitrario fijado de antemano, alterando el orden de sus términos. Por consiguiente, si la suma de una serie convergente no depende del orden de sus términos, entonces esta serie es absolutamente convergente.

8. Condición Necesaria y Suficiente de Convergencia de una Serie. Análogamente a la teoría de las secuencias (Pág 25) puede formularse la condición necesaria y suficiente para que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente.

Observemos que si $p>0$, entonces

$$s_{n+p}-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}.$$

Por tanto es válida la siguiente proposición:

Teorema de Cauchy. Para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon>0$ pueda encontrarse un número N tal que para los enteros cualesquiera $p>0$ y $n>$N se cumpla la desigualdad

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon, \quad \text{esto es,} \quad |a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

Ejemplo. Sea $\{a_n\}$ una secuencia arbitraria con términos positivos, decrecientes y que tienden a cero. Demostrar que la serie

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\dots+(-1)^{n-1}a_n+\dots$$

es convergente.

Tenemos:

$$s_{n+p}-s_n=\pm(a_{n+1}-a_{n+2}+\dots\pm a_{n+p}) \qquad (p>0).$$

Aceptemos que n es par; entonces obtenemos:

$$s_{n+p}-s_n\leqslant a_{n+1},$$

Como

$$s_{n+p}-s_n=a_{n+1}+(-a_{n+2}+a_{n+3})+(-a_{n+4}+a_{n+5})+\dots,$$

y las expresiones en los paréntesis son,evidentemente no-positivas.

Observemos, todavía que

$$0\leqslant s_{n+p}-s_n.$$

En efecto,

$$s_{n+p}-s_n=(a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\dots,$$

y las expresiones entre paréntesis son no-negativas.

Puede demostrarse, análogamente, que si n es impar entonces

$$-a_n\leqslant s_{n+p}-s_n\leqslant 0.$$

Así pues, para cualesquier n y $p>0$ tenemos:

$$|s_{n+p}-s_n|\leqslant a_n.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, entonces para todo número $\varepsilon>0$ puede tomarse tal número N que para cada $n>N$ se satisfaga la desigualdad

$$o<\varepsilon;$$

por consiguiente, para todo $n>N$ y $p>0$ tiene lugar la desigualdad

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon.$$

Entonces, nuestra serie satisface la condición de Cauchy y por consiguiente, es convergente.

Las siguientes series pueden servir de ejemplos:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,\quad 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

9. Comparación de Series. No siempre es fácil investigar la convergencia o divergencia de una serie dada. En muchos casos se hace uso de la siguiente proposición:

Teorema. Si, a partir de cierto término, todos los términos subsecuentes de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no exceden en módulo los correspondientes términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geq 0)$, entonces de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se deduce la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (incluso, absoluta) y de la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se deduce la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Demostración. Sea a_N aquel término, a partir del cual cada uno de los términos subsecuentes $a_n (n>N)$ satisfacen la desigualdad

$$|a_n|\leq b_n.$$

Es fácil ver, que haciendo

$$s_n=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|,$$
$$s'_n=b_1+b_2+\ldots+b_n,$$

obtenemos:

$$s_n\leq s_N+s'_n. \qquad (1)$$

Si ahora admitimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces, haciendo

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

tendremos:

$$s'_n\leq S':$$

de donde, en virtud de (1)

$$s_n\leq s_N+S'.$$

Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es acotada, y por tanto convergente.

Así pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

De la aceptación de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, se concluye la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Efectivamente, en caso contrario, en virtud tan sólo de lo demostrado la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplos.

1. La serie $1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots$ es convergente, ya que sus términos son menores que los términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (Pág.139)

2. La serie $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$ es absolutamente convergente para todo x del intervalo $-1<x<1$, ya que las magnitudes absolutas de los términos de esta serie no exceden a los términos de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$.

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} (s\leqslant 1)$ es divergente ya que sus términos no son menores que los términos de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

10. Criterio de Cauchy. Si los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son no-negativos, entonces es válido el siguiente teorema:

Criterio de Cauchy. 1) Si existe un número no-negativo $q<1$, tal que a partir de cierto término a_N todos los subsecuentes satisfagan la desigualdad:

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q \qquad (n>N),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2) Si existe un $q\geqslant 1$, tal que a partir de cierto término a_N todos los subsecuentes satisfagan la desigualdad

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant q \qquad (n>N),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración. En el primer caso tenemos:

$$a_n\leqslant q^n \qquad (n>N).$$

Como la serie $\sum q^n$ es la serie geométrica, convergente $(0\leqslant q<1)$, entonces, de acuerdo con el teorema sobre la comparación de series, la serie $\sum a_n$ converge.

En el segundo caso tenemos:

$$a_n\geqslant q^n \qquad (n>N).$$

Como la serie $\sum q^n$ es divergente $(q\geqslant 1)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Para las aplicaciones es frecuentemente útil la proposición siguiente, que fácilmente se deduce de las anteriores:

Teorema. Si los términos de la serie $\sum a_n$ son no-negativos y si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe, entonces

La serie converge, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$;

La serie diverge, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$;

si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, entonces no es posible decir nada sobre la convergencia de la serie.

Demostración. Hagamos $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$;

eligiendo un número $\varepsilon > 0$, arbitrario, podemos encontrar cierto número N, que para $n > N$ sea

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon,$$

esto es,

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon.$$

Si se acepta que $l < 1$, entonces haciendo $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$, $q = l + \varepsilon$, obtenemos:

$$q < 1, \quad \sqrt[n]{a_n} < q \quad \text{para} \quad n > N.$$

Así pues, según el teorema anterior la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Si $l > 1$, entonces, haciendo

$$\varepsilon = \frac{l-1}{2}, \quad q = l - \varepsilon,$$

obtenemos:

$$q > 1, \quad \sqrt[n]{a_n} > q \quad \text{para} \quad n > N.$$

Por consiguiente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos.

1. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es convergente, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\ln n}}$ es convergente para $0 < x < 1$, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{2^{\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^{\frac{\ln n}{n}}} = \frac{x}{2^0} = x$$

3. El criterio de Cauchy no resuelve el problema de la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ya que tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^s = 1.$$

Sin embargo sabemos que para $s \leqslant 1$ la serie es divergente (Pág. 146) y para $s > 1$ convergente (Pág. 139)

11. Criterio de D'Alembert. Aceptemos que todos los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son positivos (en particular, diferentes de cero). Se puede formular el siguiente teorema:

Criterio de D'Alembert. 1) Si existe un número no-negativo $q<1$, tal que a partir de cierto término a_N todos los subsecuentes satisfagan la desigualdad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \qquad (n>N),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2) Si existe un número $q \geqslant 1$, que, a partir de cierto término a_N todos los subsecuentes satisfagan la desigualdad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \qquad (n>N),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostración. Observemos que en el primer caso $a_{n+1} \leqslant a_n q$ $(n>N)$, por consiguiente, haciendo $n=N+1,\ N+2,\ N+3, \ldots, N+p$ $(p>0)$, obtenemos;

$$a_{N+2} \leqslant a_{N+1}q,$$
$$a_{N+3} \leqslant a_{N+2}q \leqslant a_{N+1}q^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+p} \leqslant a_{N+1}q^{p-1}.$$

Como la serie $\sum_{p=1}^{\infty} a_{N+1}q^{p-1}$ converge $(q<1)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Similarmente procedemos en el segundo caso.

De este criterio se deduce la siguiente proposición:

Teorema: Sea que los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son positivos y que existe el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Entonces

si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, la serie será convergente;

si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, la serie será divergente.

En el caso en que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, no es posible afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

La demostración es semejante a la demostración desarrollada en la -- Pág. 147.

Ejemplos.

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es convergente para todo x.

Efectivamente, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ es convergente para $0 \leqslant x < 1$.

Efectivamente, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} x = x.$$

Por consiguiente, si $0 \leqslant x < 1$, la serie será convergente; así mismo, si $x > 1$, la serie será divergente.

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ converge siempre pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ es divergente.

Efectivamente, en el primer caso tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

y en el segundo caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

PROBLEMAS

Demostrar la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

y la divergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}.$$

SECUENCIAS Y SERIES DE FUNCIONES

12. Definición de la Convergencia de una Secuencia Funcional. Sea dada la secuencia de funciones $\{f_n(x)\}$, definidas en el intervalo (a, b). Se dice que la función f (x), definida en el intervalo (a,b), es el límite de la secuencia funcional $\{f_n(x)\}$, en este intervalo, si para cada punto x_0 del intervalo (a, b)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Si f (x) es el límite de la secuencia $\{f_n(x)\}$ en el intervalo (a, b), escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

El concepto de suma S (x) de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. se define de manera semejante.

Ejemplos.

1. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, ya que

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}$$

2. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=e^x$.

Efectivamente, tenemos:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{m}{z}\right)^z \;{}^{*)}= \lim_{z\to\infty} e^{z\ln\left(1+\frac{m}{z}\right)}.$$

Pero

$$\lim_{z\to\infty} z\ln\left(1+\frac{m}{z}\right) \;{}^{**)}= \lim_{z\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{m}{z}\right)}{\frac{1}{z}}=m$$

por consiguiente,

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{m}{z}\right)^z=e^m, \quad \text{esto es} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

3. $f_n(x)=n\sin\frac{x}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=x$.

Efectivamente, tenemos: $\lim\limits_{z\to\infty} z\sin\frac{m}{z} \;{}^{***)}= \lim\limits_{z\to\infty}\frac{\sin\frac{m}{z}}{\frac{1}{z}}=m,$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{x}{n}=x.$$

4. $f_n(x)=n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

Haciendo uso de

$$\lim_{z\to0}\frac{a^z-1}{z}=\ln a,$$

obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x$$

13. Convergencia Uniforme. Se dice que dos funciones f (x) y $\varphi(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ difieren entre sí en menos que ε ($\varepsilon>0$), si para todo x del intervalo $[a, b]$ tiene lugar la desigualdad

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

---

*) 1^∞

**) $0\cdot\infty$.

***) $\infty\cdot0$.

Se dice, asímismo, que la secuencia funcional $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$ a la función f (x) si para todo $\varepsilon > 0$ encontramos en nuestra secuencia una función $f_N(x)$ tal que toda función subsecuente difiera de f (x) en menos que ε, esto es

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad n > N.$$

Ejemplo. La secuencia $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ converge uniformemente a cero. Efectivamente, tenemos:

$$\left|0 - \frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n};$$

por consiguiente, para $n > \frac{1}{\varepsilon}$ se tiene

$$\left|0 - \frac{\sin nx}{n}\right| < \varepsilon.$$

Observación. Es evidente que una secuencia funcional, uniformemente convergente hacia cierta función f (x) converge también a ella en sentido ordinario. La recíproca, sin embargo, no puede afirmarse.

En efecto, consideremos la secuencia funcional:

$$f_n(x) = x^n \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Converge en el intervalo cerrado [0, 1] a la función f (x), definida en la siguiente forma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{para} \quad x = 1. \end{cases}$$

Observemos, sin embargo, que para un número $\varepsilon < 1$, arbitrario positivo y para una función arbitraria $f_n(x) = x^n$ de nuestra secuencia es válida la igualdad

$$f_n(\sqrt[n]{\varepsilon}) = \varepsilon.$$

Así pues, para $x = \sqrt[n]{\varepsilon}$ tenemos.

$$|f_n(x) - f(x)| = \varepsilon.$$

Pero entonces ninguna de las funciones de nuestra secuencia puede diferir de f (x) en menos que ε, esto es, la secuencia no converge uniformemente á f (x).

14 Operaciones entre Secuencias Funcionales Uniformemente Convergentes. Condición Necesaria y Suficiente de Convergencia Uniforme. Comparando la definición de la convergencia de las secuencias numéricas con la definición de la convergencia uniforme de secuencias de funciones vemos que estas últimas son la generalización natural de las primeras.

Muchos de los teoremas de la teoría de las secuencias numéricas fácilmente se transladan a las secuencias uniformemente convergentes de fun-

ciones.

1. Si las secuencias funcionales $\{f_n(x)\}$ y $\{\varphi_n(x)\}$ convergen uniformemente en $[a, b]$, á f (x) y á $\varphi(x)$, respectivamente, entonces:

1) La secuencia $\{f_n(x)+\varphi_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)+\varphi(x)$;

2) La secuencia $\{f_n(x)\cdot\varphi_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)\cdot\varphi(x)$.

2. Si existe un número $\alpha>0$, tal que para todo x del intervalo $[a, b]$

$$|\varphi_n(x)|>\alpha,$$

entonces la secuencia $\left\{\frac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}\right\}$ converge uniformemente a $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Condición Necesaria y Suficiente de Convergencia Uniforme. Para que una secuencia funcional $\{f_n(x)\}$ converja uniformemente en el intervalo cerrado $[a, b]$ a cierta función es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon>0$ pueda determinarse en la secuencia una función $f_N(x)$ tal que dos funciones cualesquiera, subsecuentes difieran entre sí en menos que ε, en el intervalo $[a, b]$, esto es,

$$|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon \quad \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad p, q>N.$$

Demostración. Esta condición es necesaria. En efecto supongamos que la secuencia $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f (x) en (a, b). Eligiendo un número arbitrario $\varepsilon'>0$, puede en virtud de la definición de convergencia uniforme fijarse en la secuencia una función $f_N(x)$, tal que

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon' \quad \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad n>N. \tag{1}$$

Tomando ahora dos funciones arbitrarias $f_p(x)$ y $f_q(x)$ ubicadas en la secuencia de funciones $f_N(x)$, obtenemos

$$|f_p(x)-f_q(x)|=|f_p(x)-f(x)+f(x)-f_q(x)|\leqslant|f_p(x)-f(x)|+|f(x)-f_q(x)|.$$

De donde, en virtud de (1), obtenemos:

$$|f_p(x)-f_q(x)|<2\varepsilon', \quad \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad p, q>N. \tag{2}$$

Haciendo ahora $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$, comprobamos la necesidad de nuestra condición.

La condición es suficiente también. Admitamos que nuestra secuencia satisface esta condición. Entonces, como fácilmente se ve, converge para todo $a\leqslant x\leqslant b$; lo que se deduce inmediatamente del teorema de Cauchy sobre las secuencias.

Hagamos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Sea ε un número arbitrario positivo. En virtud de la suposición, en la secuencia existe una función $f_N(x)$ tal que

$$|f_p(x)-f_n(x)|<\varepsilon \quad \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad p>N, \quad n>N; \qquad (3)$$

pero

$$\lim_{p\to\infty} |f_p(x)-f_n(x)|=|f(x)-f_n(x)| \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

por consiguiente, con fundamento en (3),

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad n>N.$$

Vemos, así, que la secuencia $\{f_n(x)\}$ es uniformemente convergente.

15. Condición Suficiente de Continuidad de una Función Límite. El límite de una secuencia uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua.

Demostración. Aceptemos que la secuencia $\{f_n(x)\}$ de funciones continuas, en el intervalo cerrado $[a, b]$, converge uniformemente, en este intervalo, a la función f (x). Elijamos un número arbitrario $\varepsilon'>0$. Como se deduce de la condición, existe en nuestra secuencia una función $f_n(x)$ que difiere de f (x) en menos que ε', es decir,

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon' \quad (a\leqslant x\leqslant b). \qquad (1)$$

Sea x_0 un punto interior cualquiera del intervalo $[a, b]$. Como según la condición $f_n(x)$ es continua, existirá una vecindad tal del punto x_0 que para todo punto x' de esta vecindad se satisfaga la desigualdad

$$|f_n(x')-f_n(x_0)|<\varepsilon'. \qquad (2)$$

Pero

$$|f(x')-f(x_0)|=|f(x')-f_n(x')+f_n(x')-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|,$$

de donde

$$|f(x')-f(x_0)|\leqslant|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

Con fundamento en (1) y (2), tenemos:

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon'+\varepsilon'+\varepsilon'=3\varepsilon'.$$

Haciendo $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{3}$, vemos que para todo punto x_0 se encuentra una vecindad tal que en cada punto x' tiene lugar la desigualdad

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Así pues, la función f (x) es continua para $x = x_0$. Análogamente se demuestra su continuidad para x = a y x = b. De suerte que la función f (x) es con-

tinua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Observación. Es fácil demostrar que si una secuencia de funciones continuas converge uniformemente, entonces su función límite no necesariamente es continua. Efectivamente, haciendo $f_n(x) = x^n$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

(ver ejemplo, Pág. 151).

Así pues, la función límite no es continua para $x = 1$.

16. Convergencia Uniforme de las Series. El concepto de convergencia uniforme de una secuencia de funciones puede extenderse fácilmente a las series funcionales. Se dice que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente, en un intervalo cerrado $[a, b]$, si la correspondiente secuencia funcional $\{s_n(x)\}$ de sus sumas parciales converge uniformemente en este intervalo.

Para investigar si una serie funcional dada converge uniformemente, lo que frecuentemente es importante, en muchos casos es suficiente la siguiente proposición.

Condición de Convergencia Uniforme de una Serie. Sea dada la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y la serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos no-negativos. Si a partir de cierta función $f_N(x)$ se satisfacen siempre las desigualdades

$$|f_n(x)| \leqslant a_n \quad \text{para} \quad n > N, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Observemos que si $p > q > N$, entonces, haciendo

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x), \quad \sigma_m = \sum_{n=1}^{m} a_n,$$

obtenemos:

$$|s_p(x) - s_q(x)| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \ldots + f_p(x)|,$$

por consiguiente,

$$|s_p(x) - s_q(x)| \leqslant |f_{q+1}(x)| + |f_{q+2}(x)| + \ldots + |f_p(x)|.$$

Por lo que, en virtud de la condición

$$|s_p(x) - s_q(x)| \leqslant a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_p,$$

esto es,

$$|s_p(x) - s_q(x)| \leqslant \sigma_p - \sigma_q \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad p > q > N. \quad (1)$$

Como de acuerdo con dicha condición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y por consiguiente la secuencia $\{\sigma_n\}$, converge, entonces con base en el teorema de Cauchy

puede determinarse un número N' tal que para $p > N'$ y $q > N'$ es válida la desigualdad

$$|\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Tomando ahora un número arbitrario N'' mayor que los números N y N' obtenemos, en virtud de (1) y (2)

$$|s_p(x) - s_q(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b, \ p > q > N''.$$

Así pues, la secuencia $\{s_n(x)\}$, y por consiguiente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, convergen uniformemente.

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge uniformemente en el intervalo cerrado $[-h, h]$ bajo la condición de que $|h| < 1$ Efectivamente, tenemos:

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant \frac{|h|^n}{n} \leqslant |h|^n;$$

la propia serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} |h|^n$ converge para $|h| < 1$.

17. Convergencia Absoluta y Uniforme de Series Funcionales. Se dice que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en un intervalo cerrado $[a, b]$, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge uniformemente en este intervalo. Es fácil ver que si la serie converge absoluta y uniformemente, entonces también converge uniformemente. La recíproca, no obstante no es verdadera.

18. Diferenciación de Secuencias y Series. Si las funciónes de la secuencia $\{f_n(x)\}$ son continuas y tiene primeras derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ y si las secuencias $\{f_n(x)\}$ y $\{f'_n(x)\}$ convergen uniformemente en este intervalo, haciendo

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

podemos aseverar que la función f (x) tiene derivada y que

$$\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

Demostración. Hagamos

$$\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = \varphi(x).$$

Sea x_0 un punto arbitrario en el interior del intervalo $[a, b]$.

Por el teorema sobre el valor medio tenemos:

$$\left|\frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| = |f'_n(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0)| =$$
$$= |f'_n(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0 + \theta h) + \varphi(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f'_n(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0 + \theta h)| + |\varphi(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0)|. \qquad (1)$$

Sea ε un número arbitrario positivo. Como la secuencia $\{f'_n(x)\}$ converge uniformemente a $\varphi(x)$ entonces existe un número N tal que para todo $n > N$ y para todo x es válida la desigualdad

$$|f'_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De donde se desprende que para $n > N$ y para todo h, tenemos:

$$|f'_n(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0 + \theta h)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Como la función $\varphi(x)$ es continua en tanto que el límite de la secuencia uniformemente convergente de funciones continuas, existirá un número $\eta > 0$, tal que para todo x que satisface la desigualdad $|x' - x_0| < \eta$ tiene lugar

$$|\varphi(x') - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, si $|h| < \eta$, entonces, tomando en cuenta que $0 < \theta < 1$, obtenemos:

$$|\varphi(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

De las relaciones (1), (2) y (3) se deduce la desigualdad

$$\left|\frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon \quad (4)$$

para cualquier $n > N$ y $|h| < \eta$.

Si se acepta que n tiende al infinito, entonces de la desigualdad (4) obtenemos la desigualdad

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| \leqslant \varepsilon. \quad (5)$$

Así pues, hemos demostrado que para cualquier número $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un $\eta > 0$, tal que para todo $0 < |h| < \eta$ se satisface la desigualdad (5). Por consiguiente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \varphi(x_0),$$

esto es

$$f'(x_0) = \varphi(x_0)$$

Análogamente se obtiene la demostración para $x_0 = a$ y para $x_0 = b$.

Observación. 1. Si la secuencia de derivadas no converge uniformemente entonces la aseveración del teorema puede ser falsa. Por ejemplo, la secuencia $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ tiende uniformemente a cero: la secuencia de las derivadas $\{\cos nx\}$ no tiende a cero, ya que por ejemplo, para x = 0 su límite es igual a 1.

Observación 2. Un teorema análogo puede formularse para las series. Si las funciones $u_n(x)$ son continuas y tiene derivadas continuas en $[a, b]$ y si las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ convergen uniformemente, entonces haciendo

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

tendremos:
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x).$$

19. Series de Potencias. Se llama serie de potencias a una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Es una serie funcional con términos

$$f_n(x)=a_nx^n.$$

Ejemplos.

1. $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

2. $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Teorema. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ converge para $x=x_0\neq 0$, entonces en todo intervalo cerrado alojado en el interior del intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$, converge absoluta y uniformemente.

Demostración. Consideremos el intervalo cerrado $[-h, h]$ $(h>0)$, alojado en el interior del intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$. Sea x un punto arbitrario del intervalo $[-h, h]$, por consiguiente, $|x|\leq h$. Observemos que por la condición dada, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ converge, y por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0,$$

puesto que la secuencia $\{a_nx_0^n\}$ en tanto que convergente, es acotada. De suerte que existe un número $M>0$, tal que para todo n es válida la expresión

$$|a_nx_0^n|<M.$$

Como $a_nx^n=a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$, entonces

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \qquad (1)$$

Pero $0<h<|x_0|$, por lo que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{h}{x_0}\right|^n$ es convergente y por consiguiente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ converge uniformemente para $|x|\leq h$, pues sus términos en virtud de (1) son menores en módulo que los términos correspondientes de la serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{h}{x_0}\right|^n$, lo que por el teorema de la Pág. 154 es suficiente para la convergencia uniforme.

20. Radio de Convergencia de una Serie de Potencias. Del teorema antes demostrado se deduce que si para cierto x = L la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge, entonces para todo x, para el que $|x|>|L|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ también diverge. De donde, haciendo uso de la teoría de los números irracionales llegamos a la conclusión de que si la serie no es convergente para todos los x, entonces el conjunto de tales valores de x, para los que la serie converge, forman un intervalo con centro en el punto x = 0.

Representando por R el extremo derecho de este intervalo, vemos que si $|x|<R$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente y si $|x|>R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ será divergente.

De suerte que puede formularse el siguiente teorema:

Teorema. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no es convergente para todos los valores de x, existe tal número $R \geq 0$, para el que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converja para $|x|<R$ y diverja para $|x|>R$. Para $x=\pm R$ la serie puede ser convergente o divergente.

El número R recibe el nombre de radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x, se dice que su radio de convergencia es igual a $+\infty$.

21. Continuidad de la Suma de una Serie de Potencias. Como una serie de potencias es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado, completamente alojado en el interior del intervalo $(-R, R)$, entonces

La suma de una serie de potencias es una función continua para todos los valores de x de módulo menor que el radio de convergencia.

Observación. Si la serie de potencias converge donde quiera, entonces su suma es una función continua donde quiera.

22. Cálculo del Radio de Convergencia. Para determinar el radio de convergencia es suficiente, por lo común, usar uno de los siguientes teoremas:

Teorema: 1. Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=g$$

y $g\neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ será el número

$$R=\frac{1}{g}.$$

Si $g = 0$, entonces $R=+\infty$.

Teorema 2. Si existe $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g$ y $g\neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ será el número

$$R=\frac{1}{g}.$$

Si g = 0, entonces $R=+\infty$.

Demostración. La demostración del teorema 1 se desprende inmediatamente del criterio de Cauchy (Pag. 147). Efectivamente, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x|=g\cdot|x|;$$

por consiguiente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ converge para $g\cdot|x|<1$ (esto es, para $|x|<\frac{1}{g}$)) y diverge para $g\cdot|x|>1$ (esto es, para $|x|>\frac{1}{g}$). Vemos así que $\frac{1}{g}$ es el radio de convergencia. Si g = 0, entonces $g\cdot|x|=0<1$ por consiguiente, la serie siempre converge.

Análogamente, con apoyo en el criterio de D'Alembert (Pag.148), puede demostrarse el teorema 2.

23. Diferenciación de Series de Potencias. Diferenciando término a término la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \qquad (1)$$

obtenemos una nueva serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

Puede demostrarse la veracidad de la proposición siguiente.

Teorema. Las series (1) y (2) tienen uno y el mismo radio de la convergencia. La suma de la serie (2) es igual a la derivada de la serie (1) para todos los valores de x menores en módulo que el radio de convergencia de estas series.

Demostración. Admitamos que R es el radio de convergencia de la serie (1). Sea

$$0<|x|<R.$$

Tomemos un número arbitrario α, que satisfaga la desigualdad $|x|<\alpha<R$. Como

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

existirá un número N tal que para todo $n>$

por consiguiente,

$$\sqrt[n]{n}<\frac{\alpha}{|x|},$$

$$|a_n|\,|\sqrt[n]{n}\,x|^n<|a_n|\alpha^n.$$

Dado que los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|\sqrt[n]{nx}|^n$ no exceden los términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\alpha^n$ + entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n$ converge absolutamente. Dividiendo esta serie entre x vemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ es también absolutamente convergente para todo $|x|<R$.

Aceptemos ahora que $|x|>R$. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|x|^n$ es divergente y sus términos son menores que los de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\,|x|^n$ entonces esta última serie es también divergente, de donde se infiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\,|x^{n-1}|$ es divergente para $|x|>R$. Así pues, el radio de convergencia de la serie (2) es también R.

Si $0<r<R$, entonces la serie (2) converge uniformemente en el intervalo $[-r, r]$, y por consiguiente, de acuerdo con el teorema sobre la diferenciación de series (Pág. 155), su suma es la derivada de la suma (1). Como r puede ser un número positivo arbitrario, satisfaciendo únicamente $r<R$, entonces la suma de la serie (1) posee dondequiera en el interior del intervalo $(-R, R)$ derivada, que es la suma de la serie (2).

Observación. El teorema demostrado es válido también con respecto a la serie obtenida de la serie (2) mediante una diferenciación ulterior.

Ejemplo. Como se sabe,

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1;$$

por consiguiente,

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1,$$

$$2+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots=\frac{2}{(1-x)^3},\quad |x|<1.$$

24. Serie de Taylor. Sea f (x) una función continua, definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, con derivadas de todos los órdenes, continuas también en este intervalo. Representando por x_0, x_0+h dos puntos arbitrarios del intervalo (a, b) y por un número natural arbitrario, obtenemos según la fórmula de Taylor (Pag. 113):

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+R_n(x_0, h),$$

siendo

$$R_n(x_0, h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}f^{(n)}(x_0+\theta' h),$$
$$0<\theta<1,\quad 0<\theta'<1.$$

+) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\alpha^n$ es convergente ya que $0<\alpha<R$.

Puede suceder que para un crecimiento ilimitado de n, la expresión $R_n(x_0, h)$ tienda a cero, es decir que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x_0, h) = 0.$$

En este caso la serie infinita

$$f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

converge al límite $f(x_0 + h)$. Tenemos, así,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

la serie en el miembro derecho recibe el nombre de Serie de Taylor. Así pues, hemos demostrado la proposición siguiente:

Teorema. Si la función f (x) y sus derivadas de todos lor órdenes son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y x_0, $x_0 + h$ son dos puntos arbitrarios de este intervalo, entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots =$$

$$= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

bajo la condición de que el término del residuo $R_n(x_0, h)$ de la fórmula de Taylor tienda a cero, cuando n crece ilimitadamente.

Observación. Si el intervalo $[a, b]$ contiene al punto x = 0, entonces substituyendo 0 en lugar de x_0 y x en lugar de h en la serie de Taylor, obtenemos

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots =$$

$$= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

bajo la condición; $\lim_{n\to\infty} R_n(0, x) = 0.$

Esta es la llamada Serie de Maclaurin.

El teorema arriba formulado tiene un valor fundamental.
Proporciona el desarrollo de la función f (x) en una serie de potencias cuando el término del residuo $R_n(x_0, h)$ tiende a cero.

Observación. En particular el término residual tiende a cero cuando las derivadas de la función son acotadas en su totalidad en el intervalo $[a, b]$, esto es, cuando para todo natural n y para todo x de este intervalo

$|f^{(n)}(x)|<M$ Efectivamente, en ese caso tenemos:

$$|R_n(x_0, h)|=\left|\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)\right|<M\frac{|h|^n}{n!},$$

y como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|h|^n}{n!}=0$$

(ver Pág. 30), tendremos

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x, h)=0.$$

Ejemplos.

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$

para cada x.

2. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$

para cualquier x.

3. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$

para todos los x.

4. $\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots$

para $1<x\leqslant+1$.

5. $(1+x)^p=1+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\dots+\binom{p}{n}x^n+\dots$

para $|x|<1$ y p arbitrario.

Demostración. 1. La función e^x es continua en el intervalo cerrado $[-A, A]$. (A es un número arbitrario positivo) así como sus derivadas de todos los órdenes, ue coinciden con ella. Por tanto las derivadas de todos los órdenes son acotadas en su totalidad, a saber

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant e^A,$$

para todo número natural n y para todo x del intervalo $[-A, A]$.

Por consiguiente, en virtud de la observación anterior la serie de Taylor es convergente para $-A\leqslant x\leqslant A$, es decir, para todo x ya que A es un número arbitrario.

2, 3. Las mismas consideraciones en relación con las funciones sen x y

cos x, pues las derivadas de todos los órdenes son continuas y en módulo no exceden a la unidad.

4. La función $\ln(1+x)$ y sus derivadas de todos los órdenes son continuas en todo intervalo cerrado que no contenga al punto $x=-1$ El término residual de la fórmula de Maclaurin, para esta función tiene la forma (Pág. 118):

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}=(-1)^{n+1}\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n}x^n,$$

siendo $0<\theta<1$, $0<\theta<1$.

Haciendo $0\leqslant x\leqslant 1$, obtenemos:

$$|R_n(x)|=\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}\leqslant\frac{1}{n},$$

por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Así mismo, si $\varepsilon\leqslant x\leqslant 0$ $(0<\varepsilon<1)$, entonces, haciendo $-x=u$,

obtenemos

$$|R_n(x)|=\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n}|x^n|=\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1-\theta' u)^n}u^n=\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}\right)^{n-1}\frac{u^n}{1-\theta' u}.$$

Como $0\leqslant\theta' u<\theta'<1$, entonces $0<1-\theta'<1-\theta' u$, por consiguiente

$$0<\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}<1.$$

De estas desigualdades obtenemos:

$$|R_n(x)|<\frac{u^n}{1-\theta' u}<\frac{u^n}{1-u}\leqslant\frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}.$$

Como $0<\varepsilon<1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon^n=0$, y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Como ε es un número arbitrario positivo, menor que la unidad, hemos demostrado la validez de la fórmula de Maclaurin para la función $\ln(1+x)$ en el intervalo $-1<x\leqslant 1$.

Para $x=-1$ obtenemos la serie $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots$,

que, como sabemos, (ver Pág. 139) es divergente.

5. La función $(1+x)^p$ es continua, en conjunto con sus derivadas de todos los órdenes en todo intervalo cerrado que no contenga el punto $x=-1$.

El término del residuo de la fórmula de Maclaurin para esta función

(Pág.118) tiene la forma

$$R_n(x)=\binom{p}{n}(1+\theta x)^{p-n}x^n=\binom{p}{n}n(1-\theta')^{n-1}(1+\theta' x)^{p-n}x^n,$$
$$0<\theta<1, \quad 0<\theta'<1.$$

Si $0\leq x<\varepsilon<1$, entonces, usando la primera forma del residuo, obtenemos:

$$R_n(x)=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^{n-p}},$$

por consiguiente para $n>p$

$$|R_n(x)|\leq\left|\frac{px}{1}\right|\cdot\left|\frac{(p-1)x}{2}\right|\ldots\left|\frac{(p-n+1)x}{n}\right|.$$

como

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(p-k)x}{k}=-x,$$

tendremos

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(p-k)x}{k}\right|=x<\varepsilon.$$

Existe, por consiguiente, un número K tal que para $k>K$ será

$$\left|\frac{(p-k)x}{k}\right|<\varepsilon.$$

Haciendo $n>p$ y $n>K$ obtenemos:

$$|R_n(x)|\leq\left|\frac{px}{1}\right|\cdot\left|\frac{(p-1)x}{2}\right|\ldots\left|\frac{(p-K)x}{K}\right|\varepsilon^{n-K-1},$$

y como

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon^{n-K-1}=0,$$

tendremos

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Si $-\varepsilon<x\leq 0\ (0<\varepsilon<1)$, haciendo $x=-u$ y empleando la segunda forma del residuo, obtenemos:

$$R_n(x)=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(1-\theta')^{n-1}(1+\theta' x)^{p-n}x^n,$$

así que

$$R_n(x)=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}\right)^{n-1}(1-\theta' u)^{p-1}(-u)^n,$$

de donde

$$|R_n(x)| =$$
$$= |pu| \left|\frac{(p-1)u}{1}\right| \left|\frac{(p-2)u}{2}\right| \dots \left|\frac{(p-n+1)u}{n-1}\right| (1-\theta' u)^{p-1} \left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}\right)^{n-1}.$$

Como $(1-\theta' u)^{p-1}$ esta comprendido entre 1 y $(1-\varepsilon)^{p-1}$, y $\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}\right)^{n-1}$ como sabemos, no es mayor que la unidad (ver Pág.163) será suficiente con comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} |pu| \left|\frac{(p-1)u}{1}\right| \left|\frac{(p-2)u}{2}\right| \dots \left|\frac{(p-n+1)u}{n-1}\right| = 0.$$

La demostración es la misma como la del caso anterior.

Como ε es un número positivo arbitrario, menor que la unidad, se demuestra efectivamente, la validez de la fórmula de Maclaurin para nuestra función en el intervalo

$$-1 < x < 1.$$

Observación. Aplicando el último desarrollo obtenemos las series:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{6} - \dots,$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{6} - \dots,$$

Convergentes para $-1 < x < 1$.

PROBLEMAS

1. Demostrar la validez de los siguientes desarrollos.

$$\sin^2 x = \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + \dots;$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots;$$
$$(1+e^x)^2 = 4 + (2+2)\frac{x}{1!} + \dots + (2+2^n)\frac{x^n}{n!} + \dots;$$
$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \qquad |x|<1;$$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots^{*}), \qquad |x|<1;$$
$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \dots, \qquad |x|<1;$$
$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots, \qquad |x|<1;$$
$$(\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots^{*}), \qquad |x|<1.$$

2. La función tg x tiene un desarrollo convergente para $|x| < \frac{\pi}{2}$:

+) Se diferencían ambos miembros de las igualdades.

$$\operatorname{tg} x = \frac{B_1 2^2 (2^2-1)}{2!} x + \frac{B_3 2^4 (2^4-1)}{4!} x^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{B_{2n-1} 2^{2n} (2^{2n}-1)}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots$$

Determinar las constantes $B_1, B_3, B_5,$ llamados números de Bernoulli.

3. Demostrar la validez de los siguientes desarrollos:

$$\sin (x+h) = \sin x + \frac{\cos x}{1!} h - \frac{\sin x}{2!} h^2 + \dots;$$
$$\cos (x+h) = \cos x - \frac{\sin x}{1!} h - \frac{\cos x}{2!} h^2 + \dots;$$
$$\ln (x+h) = \ln x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3 + \dots, \quad |h| < |x|.$$

4. Si se requiere resolver la ecuación $f(x) = 0$ entonces representando con x_0 un valor aproximado de una raíz (obtenida, por ejemplo, por tanteos) y con $x_0 + h$ la raíz desconocida, obtenemos:

$$0 = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots$$

Si h es suficientemente pequeño, entonces despreciando los términos que contienen h^2, h^3 ,etc., obtenemos:

$$0 = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0),$$

de donde

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Así pues el nuevo valor aproximado de la raíz buscada tiene la forma

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Con el valor aproximado obtenido puede procederse como antes y calcular una nueva aproximación, etc. El método descrito fué propuesto por Newton.

Resolver por este método las ecuaciones:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0;$$
$$2 \sin x = x;$$
$$\ln x = x.$$

CAPITULO IX

FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

CONCEPTO DE FUNCION DE DOS VARIABLES

1. Conjuntos planos. Dominios. Se dice que un conjunto de puntos es un conjunto plano, si los puntos de este conjunto están en un plano.

Un conjunto plano es restringido si existe un círculo que lo contenga en su interior, Un segmento, un triángulo, etc., son conjuntos restringidos. Una línea recta no es un conjunto restringido.

Vecindad de un punto P es la interioridad de todo círculo con centro en P. Si un punto de un conjunto dado posee la propiedad de que exista cierta vecindad suya totalmente perteneciente al conjunto, entonces tal punto recibe el nombre de punto interior del conjunto dado. Un conjunto formado exclusivamente por puntos interiores recibe el nombre de dominio abierto ó brevemente, dominio. Los dominios más simples son: la interioridad de un triángulo, de un polígono, de un círculo, de una elipse, etc.

Se dice que un dominio es conexo si dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea quebrada+) integramente alojada en el dominio dado. Todos los dominios antes mencionados son dominios conexos; el dominio representado por las interioridades de dos círculos que no tienen ningún punto en común no es conexo. El conjunto que obtenemos al excluir de un círculo la circunferencia y un diámetro también es un dominio no conexo.

2. Puntos de frontera. Dominios cerrados. Un punto, no perteneciente a un dominio, se dice que es frontero si cada una de sus vecindades contiene puntos pertenecientes al dominio. El conjunto de todos los puntos fronteros se llama frontera de este dominio. La frontera de la interioridad de un polígono, de un círculo, etc. son respectivamente, la poligonal, la circunferencia, etc.

El conjunto formado por el dominio y su frontera se llama dominio cerrado.

3. Dominios dados mediante desigualdades. Es frecuente encontrar dominios definidos de la siguiente manera.

Sea que se tienen dos funciones definidas y continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$:

$$y=f(x), \quad y=\varphi(x).$$

+) Si en el plano tenemos un número finito de puntos $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ entonces el conjunto de segmentos $A_1, A_2, A_2A_3, \dots A_{n-1}A_n$ es una línea quebrada que une los puntos A_1 y A_n.

Aceptemos además que

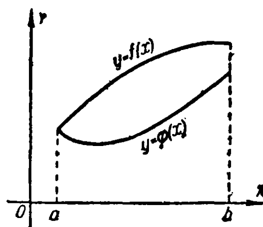
$$\varphi(x)<f(x) \qquad a<x<b.$$

Esto significa (Fig. 38) que la gráfica de la función f(x) se encuentra abajo de la gráfica de la función $\varphi(x)$ (con exclusión, quizá, de los extremos del intervalo, en los que es posible $f(x)=\varphi(x)$).

El conjunto de los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades:

$$a<x<b,$$
$$\varphi(x)<y<f(x),$$

forman un dominio conexo y le sirven de frontera las gráficas de las funciones f(x), $\varphi(x)$ y los segmentos rectílineos que unen los correspondientes extremos de estas curvas. Es evidente que en algunos casos estos segmentos se reducen a puntos.



(Fig. 38

PROBLEMAS

Mostrar los dominios dados por las desigualdades:

1. $-1<x<1, \qquad -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2};$

2. $0<x<1, \qquad x^2<y<x^2+1;$

3. $1<x<3, \qquad 3-\sqrt{4x-x^2-3}<y<3+\sqrt{4x-x^2-3};$

4. $-1<x<1, \qquad 0<y<1-|x|;$

5. $0<x<1, \qquad 0<y<1, \ |x-y|>\frac{1}{2}.$

Observación. Es común encontrarse con un dominio cerrado definido por las desigualdades:

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad a'\leqslant y\leqslant b'.$$

Este, evidentemente, es un rectángulo con vértices(a, a'), (a, b'), (b, a'), (b, b').

4. Funciones de dos variables. Sea E un conjunto arbitrario de puntos del plano OXY. Se dice que una función está definida en el conjunto E, si cada punto (x, y) del conjunto E está en correspondencia con un número real z.

La dependencia funcional se representará como antes por:

$$z=f(x, y), \quad z=\varphi(x, y)$$

Los números x, y, se llaman variables independientes, el número z variable dependiente; en cuanto a la función f(x,y) se dirá que es una función de las dos variables independientes x, y, definida en el conjunto E. Generalmente el conjunto E es un dominio abierto o cerrado.

Ejemplos de funciones de dos variables:

1. $z=x^2+y^2$ para todo x, y.

2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ para $x^2+y^2\leq 1$.

3. $z=\frac{1}{(x-1)(y-2)}$ para $0<x<1,\ 1<y<2$.

Si la función f(x, y) está definida solamente por una fórmula, consideraremos que el conjunto E está formado por aquellos y solamente aquellos puntos (x, y) para los que la fórmula define un valor de la función.

5. Interpretación geométrica de una función de dos variables. Tomemos, en el espacio, un sistema de coordenadas OXYZ. Por imagen de la función z = f(x, y), definida en el conjunto E, tomamos el conjunto de todos los puntos (x, y, z) (superficie), donde x, y son las coordenadas de los puntos del conjunto E, y z=f(x,y).

Ejemplos.

1. $z=1-x-y$ (Fig. 39)

La imagen geométrica es el plano que pasa por los puntos (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0).

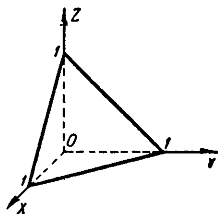


Fig. 39

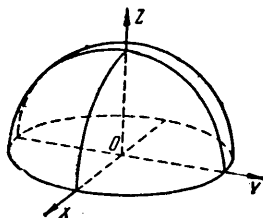


Fig. 40.

2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $x^2+y^2\leq 1$ (hemisferio; Fig. 40).

3. $z=x^2+y^2$ (paráboloide de revolución; Fig. 41).

Si la función f(x, y) es definida en el rectángulo $a<x<b$, $a'<y<b'$, entonces, haciendo $x=x_0\ (a<x_0<b)$, la expresión $z=f(x_0, y)$ puede considerarse como una función de una variable y, definida en el intervalo (a', b').

Tomemos en calidad de ejes coordenados O'Y'Z' sobre el plano $x = x_0$ las intersecciones de éste con los planos OXY y OXZ. Elijamos las mis-- mas direcciones de los ejes OY y OZ para los ejes O'Y' y O'Z' (Fig. 42).

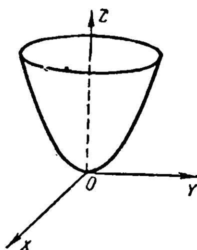


Fig. 41

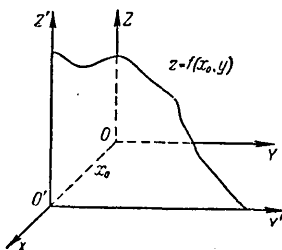


Fig. 42

Construyamos, sobre el plano O'Y'Z', la gráfica de la función z' = f(x,y); - Evidentemente, esta gráfica es la línea de intersección de la superficie -- z = f(x, y) con el plano

Si la función f(x, y) varía regularmente, entonces, trazando estas secciones con presic ón adecuada, podemos representar con sudiciente claridad la imagen geométrica de la función z = f(x, y).

Podemos estudiar también las intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano OXZ, La suposición hecha en el sentido de que la - función está definida en un rectángulo no es, evidentemente, obligatoria; - la misma imagen puede estudiarse cuando la función está definida en con-- juntos planos arbitrarios.

Ejemplos. Investigar las intersecciones de las siguientes superficies con planos paralelos a los planos coordenados OXZ y OYZ:

1. $z = xy$ (las secciones son rectas).

2. $z = x^2 - y^2$ (las secciones son parábolas).

3. $z = xy^2$ (las secciones con planos paralelos al plano OXZ son -- rectas, las secciones con planos paralelos al plano OYZ son parábolas.

6. Líneas de nivel. Línea de nivel de una superficie z=f(x,y) es la proyección, sobre el plano OXY, de la intersección de esta superficie con un plano paralelo - al plano OXY. En otras palabras, una línea de nivel es el conjunto de todos los puntos (x, y) en los que la función toma un mismo valor. Trazando una serie de líneas de nivel y observando los valores - adquiridos por la función, obtenemos una representación más o menos exacta de la variación de la -- función (. Fig. 43).

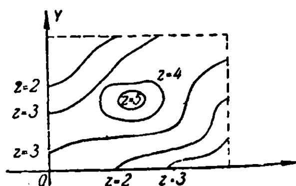


Fig. 43

PROBLEMAS

Determinar las líneas de nivel de las superficies:

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Las líneas de nivel son círculos, con excepción del valor z = 1, para el que la línea de nivel se reduce a un punto (Fig. 44).

2. $z=3x^2+2y^2$ (elipses confocales).

3. $z=xy$ (hipérbolas).

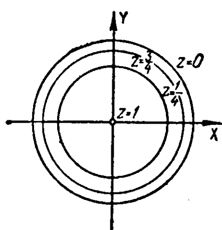


Fig. 44

LIMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCION.

7. Definición de límite. Se dice que la secuencia de puntos con coordenadas $\{(x_n, y_n)\}$ tiende a un punto (x_0, y_0) si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Además la distancia d_n entre el punto (x_n, y_n) de la secuencia y el punto límite (x_0, y_0), cuando n crece ilimitadamente; tiende a cero

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0,$$

ya que

$$d_n = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}.$$

Recíprocamente, si $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, la secuencia de los puntos $\{x_n, y_n\}$ tiende al punto (x_0 , y_0).

Sea la función z = f(x, y) definida en cierta vecindad K del punto (x_0, y_0) con exclusión, quizá del propio punto (x_0, y_0). Se dice que g es el límite de la función f(x, y) cuando x é y tienden, respectivamente, á x_0 , y_0, si para toda secuencia de puntos $\{(x_n, y_n)\}$, diferentes de (x_0, y_0) pertenecientes a la vecindad K y que tienden a (x_0 , y_0), tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g.$$

El límite se representa por:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = g.$$

Observación. El lector podrá fácilmente comprender el significado de los símbolos:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = g, \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = +\infty$$

Ejemplos.

1. $\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2 - y^2) = -3.$

2. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = 1.$

3. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty.$

4. $\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$

8. Teoremas sobre límites. Para una función de dos variables puede demostrarse multitud de teoremas análogos a los obtenidos para las funciones de una variable. La demostración de ellos se hace por los mismos métodos.

Teorema Para que un número g sea el límite de la función z = f(x, y) cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0), es necesario y suficiente que los valores de la función en los puntos suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) difieran tan poco como sea deseable de g; ó, en otras palabras, que a todo numero $\varepsilon > 0$ pueda ponerse en correspondencia una vecindad del punto (x_0, y_0) tal que el valor de la función en un punto cualquiera de esta vecindad (diferente, sin embargo, de (x_0, y_0)), difiera de g en menos que ε

Para las funciones de dos variables son válidos también los teoremas sobre el límite de la suma, el producto y el cociente, similares a los correspondientes teoremas de las funciones de una variable. Asímismo, es verdadero el

Teorema. Si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = g$$

y si $g > 0$, existe un número $\alpha > 0$ y la vecindad del punto (x_0, y_0) en cuyos puntos (con la posible excepción del punto (x_0, y_0)) tiene lugar la desigualdad

$$f(x, y) > \alpha.$$

9. Continuidad. Continuidad uniforme. Se dice que la función z = f(x, y) es continua en el punto (x_0, y_0) si está definida en este punto y en uno cualquiera de sus vecindades y

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Ejemplos. Las funciones $z = x + y$, $z = x^2 - y^2$ son continuadas donde quiera.

Observación. Si la función $z = f(x, y)$ está definida en el conjunto E se dice que es continua en el punto (x_0 , y_0), del conjunto E, con respecto a este conjunto, si para toda secuencia de puntos $\{(x_n, y_n)\}$, pertenecientes a E y convergentes a (x_0 , y_0), tenemos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

Si la función es continua en cada punto del conjunto E, con respecto a este conjunto, se dice brevemente, que es continua en E.

Así que, si por ejemplo, la función es continua en un dominio cerrado Ω, entonces en los puntos interiores de él es continua en sentido ordinario y en los puntos fronteros es continua con respecto al conjunto Ω

Es posible formular teoremas y definiciones semejantes a los expuestos para las funciones de una variable, por ejemplo teoremas relativos a la continuidad de la suma, el producto y el cociente de dos funciones continuas.

a) Sean, una función $f(x, y)$ definida en un dominio Ω y un punto (x_0, y_0) perteneciente a Ω . Entonces, la condición necesaria y suficiente para la continuidad de la función en un punto (x_0 , y_0), con respecto a Ω , consiste en que los valores de la función en puntos suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) (pertenecientes a Ω) difieran tan poco como se quiera del valor de la función en el punto (x_0 , y_0). En otras palabras, que a todo número $\varepsilon > 0$ pueda seleccionarse una vecindad tal del punto (x_0 , y_0) para la que los valores de la función en los puntos de ésta (pertenecientes a Ω) difieran de $f(x_0 , y_0)$ en menos que ε .

b) Una función, definida en un conjunto Z arbitrario, es uniformemente continua en él si los valores de la función en los puntos suficientemente próximos de este conjunto difieran entre sí tan poco cuanto se quiera, es decir, si para todo número $\varepsilon > 0$ se encuentra cierto número $\eta > 0$, tal que los valores de la función en dos puntos cualesquiera del conjunto Z, cuya distancia entre sí sea menor que η , difieran entre sí en menos que ε .

c) Si la función es definida y continua en un dominio Ω, restringido y cerrado, entonces:

1) es acotada y uniformemente continua en este dominio:

2) adquiere, por lo menos en un punto del dominio Ω, un valor máximo y en otro punto, por lo menos, un valor mínimo.

3) si se acepta que el conjunto de los puntos interiores del dominio Ω es un conjunto conexo, entonces la función adquiere todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

d) si una función, continua en un dominio cerrado Ω, es positiva en algún punto de este dominio, existirá cierta vecindad de este punto y una constante $\alpha > 0$, tal que en cada punto de esta vecindad (perteneciente a Ω) tiene lugar la desigualdad

$$f(x, y) > \alpha.$$

DERIVADAS PARCIALES.

10. Definición de las derivadas parciales. Sea una función $z = f(x, y)$ continua en la vecindad de cierto punto (x, y). Representemos con Δx el incremente de la variable x.

Hagamos

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

El límite (si existe) de la razón $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ cuando Δx, tiende a cero recibe el nombre de primera derivada parcial con respecto á x. - Esta derivada parcial se representa con el símbolo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \qquad f'_x(x, y).$$

Así que,

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Análogamente se define la derivada parcial con respecto á y :

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Ejemplos.

1. $z = 5x^2 + 8xy^2 + y^3;$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 8y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 16xy + 3y^2.$$

2. $z = \frac{xy}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$

3. $z = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}.$$

4. $z = \ln\frac{x+y}{x-y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{x^2-y^2}.$$

5. $z = y\sin x + \cos(x-y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos x - \sin(x-y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x + \sin(x-y).$$

6. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$

7. $z = xye^{x+2y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y}y(1+x), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+2y}x(1+2y).$$

II. Derivadas parciales de segundo orden. Si se admite que las funciones f'_x y f'_y existen en la vecindad de un punto (x, y), puede suceder que cada una de éstas tengan derivadas parciales con respecto á x y con respecto á y. Estas derivadas parciales se representan con los símbolos:

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},$$
$$\frac{\partial f'_x}{\partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial f'_y}{\partial y} = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ejemplos.

1. $z = x^4 + 4x^2y^2 + 7xy + 1.$

Tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^2 + 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x,$$

por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

2. $z = \operatorname{sen} x \cos y$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x\cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x\sin y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x\cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\cos x\sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x\cos y.$$

En ambos ejemplos obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Como veremos ahora, esta propiedad pertenece a toda función $f(x, y)$ que satisfaga ciertas condiciones generales.

12. Teorema sobre el cambio del orden de la diferenciación. Si en la vecindad de un punto (x, y) existen las derivadas f''_{xy} y f''_{yx} y son continuas, serán iguales entre sí, en este punto.

Demostración. Consideremos la expresión

$$u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y),$$

donde Δx, Δy tienen algún valor constante. La expresión

$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

puede considerarse como una función de las variables x é y. Sea

$$\varphi(x, y)=f(x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

Entonces

$$\varphi(x+\Delta x, y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y).$$

Así pues,

$$u=\varphi(x+\Delta x, y)-\varphi(x, y).$$

Considerando constante á y, obtenemos de acuerdo con el teorema sobre el valor medio

$$u=\Delta x\cdot\varphi'_x(x+\theta\Delta x, y),$$

siendo

$$\varphi'_x(x, y)=f'_x(x, y+\Delta y)-f'_x(x, y).$$

Substituyendo en lugar de x la expresión $x+\theta\Delta x$, obtenemos:

$$u=\Delta x[f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)-f'_x(x+\theta\Delta x, y)].$$

Aplicando, nuevamente, a la expresión dentro del paréntesis el teorema sobre el valor medio, obtenemos:

$$u=\Delta x\Delta y f''_{xy}(x+\theta\Delta x,\ y+\theta'\Delta y). \quad (1)$$

Si inicialmente hubiésemos hecho

$$\psi(x, y)=f(x+\Delta x, y)-f(x, y),$$

entonces, procediendo de manera análoga, habríamos obtenido

$$u=\psi(x, y+\Delta y)-\psi(x, y),$$

y después

$$u=\Delta x\Delta y f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x,\ y+\theta'_1\Delta y). \quad (2)$$

Comparando entre sí las igualdades (1) y (2) obtenemos, despues de dividir entre el factor común $\Delta x\Delta y$, la igualdad

$$f''_{xy}(x+\theta\Delta x, y+\theta'\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta'_1\Delta y),$$

donde $\theta, \theta', \theta_1, \theta'_1$ son números positivos, menores que la unidad. Si

ahora hacemos que Δx y Δy tiendan a cero, en virtud de la continuidad de las derivadas f''_{xy}, f''_{yx} obtenemos:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

PROBLEMAS

Comprobar, por cálculo, la validez de la igualdad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

para las funciones:

1. $z = ax^2 + 2b\,xy + cy^2$.

2. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

3. $z = e^x y + yx^2$.

4. Para las funciones dadas en los problemas del Pár. 10 .

13. Derivadas parciales de orden superior. Al igual --- que las derivadas de segundo orden se definen las derivadas de orden superior. La derivada parcial de orden n es, por consiguiente, el resultado de diferenciaciones sucesivas con respecto a las variables x é y. La derivada parcial de enésimo orden que obtenemos tomando p veces la derivada parcial con respecto á x y la función así obtenida, derivada de q veces con respecto á y, se representará por el símbolo

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = f_{x^p, y^q}(x, y) \quad (p + q = n).$$

Ejemplo. Sea

$$z = x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

Calculemos $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$. Obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -16xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = -16x.$$

El resultado final no depende del orden en que se tomen las derivadas parciales, si todas las derivadas parciales, hasta la de enésimo orden. -

inclusive, son continuas. Efectivamente, de acuerdo con el último teorema demostrado podemos alterar el orden de dos diferenciaciones sucesivas. Puesto que variando varias veces el orden de dos diferenciaciones sucesivas podemos pasar de la derivada de algun orden a la de cualquier otro, entonces el resultado final será exactamente definido si solamente se da el número de diferenciaciones con respecto á x y á y. Por tanto el símbolo $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q}$ (p + q = n) es completamente suficiente para representar todas las derivadas parciales de enésimo orden, bajo la condición de que sean continuas en la vecindad del punto (x, y).

Ejemplo. Sea

$$z = \operatorname{arctg} \frac{yx}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Tenemos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{15xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3} = 15 \frac{1 - 5(x^2+y^2) + 51x^2y^2 - 6(x^4+y^4)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{11}{2}}}.$$

14. Función compuesta. Sea dada una función de las variables u, v:

$$z = f(u, v),$$

continua en conjunto con sus primeras derivadas parciales en el rectángulo $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, $\alpha' \leqslant v \leqslant \beta'$ Sea que las variables u, v son funciones de las variables x, y, es decir:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Admitamos que las funciones $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ son continuas así como sus derivadas parciales de primer orden en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$ y que además,

$$\alpha \leqslant \varphi(x, y) \leqslant \beta, \quad \alpha' \leqslant \psi(x, y) \leqslant \beta'.$$

Bajo estas condiciones la variable z puede considerarse como una función de las variables x, y, á saber:

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = F(x, y).$$

Se dice que la función z = F(x, y) es una función compuesta formada por las variables intermediarias u, v. Satisfechas las condiciones anteriores es fácil demostrar que la función F(x, y) es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$.

15. Derivadas parciales de funciones compuestas. Para definir la derivada parcial con respecto á x, representemos por el incremento de la variable x, y por Δx, Δu, Δv, Δz los correspondientes incrementos de las variables u, v, z. Así que

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y),$$
$$\Delta v = \psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y),$$
$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Transformemos la expresión para Δz en la siguiente forma:

$$\Delta z = [f(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - f(u,\ v+\Delta v)] + [f(u,\ v+\Delta v) - f(u,\ v)].$$

Aplicando ahora, a cada paréntesis el teorema sobre el valor medio, y - considerando para ello á $v+\Delta v$, como constante en el primer parénte-- sis y á u en el segundo, obtenemos:

$$\Delta z = f'_u(u+\theta\Delta u,\ v+\Delta v)\,\Delta u + f'_v(u,\ v+\theta'\Delta v)\,\Delta v,$$

de donde

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'_u(u+\theta\Delta u,\ v+\Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x} + f'_v(u,\ v+\theta'\Delta v)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si Δx tiende a cero, entonces, en el límite tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u\varphi'_x + f'_v\psi'_x;$$

ó

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1)$$

Análogamente

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (2)$$

Por ejemplo, sea

$$z = (3x^2 + y^2)^{4x+2y} = u^v$$

entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = vu^{v-1}\frac{\partial u}{\partial x} + u^v \ln u \frac{\partial v}{\partial x} = (4x+2y)\,(3x^2+y^2)^{4x+2y-1}6x +$$
$$+ (3x^2+y^2)^{4x+2y}4\ln(3x^2+y^2).$$

Si se supone que u y v son funciones únicamente de la variable x, de tal suerte que

$$u = \varphi(x),\quad v = \psi(x)$$

entonces

$$z = f(u,\ v) = f[\varphi(x),\ \psi(x)] = F(x).$$

Así pues, z es una función compuesta de la variable x establecida a- través de las variables u y v. En cirtud de (1) y tomando en cuenta que - en este caso $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx}$, obtenemos:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (3)$$

Sea, por ejemplo

$$z = [\varphi(x)]^{\psi(x)} = u^v;$$

entonces

$$\frac{dz}{dx} = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v' =$$
$$= \psi(x)\,[\varphi(x)]^{\psi(x)-1}\varphi'(x) + [\varphi(x)]^{\psi(x)} \ln \varphi(x)\cdot\psi'(x).$$

Si $z = f(x, y)$, $y=\psi(x)$, obtenemos:

$$z=f[x, \psi(x)]=F(x).$$

Aplicando la fórmula (1) bajo la condición que $u = x$, $v = y$, tendremos:

$$\frac{dz}{dx}=f'_x+f'_y y'_x. \qquad (4)$$

Por ejemplo, sea

$$z=x^2+3xy^2+4y, \quad y=2x^2+1,$$

de donde

$$\frac{dz}{dx}=2x+3y^2+(6xy+4)\,4x.$$

PROBLEMAS

1. $z=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\ln\frac{u+v}{u-v}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}$.

2. $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, $y=2x-3$, $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$.

3. $z=\ln\sqrt{\frac{ax+by}{ax-by}}=\ln\sqrt{\frac{u}{v}}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{aby}{a^2x^2-b^2y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{abx}{a^2x^2-b^2y^2}$

4. Demostrar que no existe una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas-parciales se expresen por las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x.$$

Resultaría que de tal función las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ serían continuas y, por consiguiente, iguales entre sí.

FUNCIONES IMPLICITAS

16. Definición de una función implícita. Sea una función $z= F(x, y)$ definida y continuas en cierto dominio. Puede suceder que -- exista una función continua $y = f(x)$ tal que las parejas (x, y) correspondientes satisfarían a la ecuación

$$F(x, y)=0. \qquad (1)$$

En este caso se dice que la función $f(x)$ está dada implícitamente por la ecuación (1).

Ejemplos. Funciones dadas implícitamente:

1.

1. $y=\frac{1-x}{1+x}$ es $xy+x+y-1=0.$

2. $y=\sqrt{r^2-x^2}$ es $x^2+y^2-r^2=0.$

3. $y=x+\sqrt{1-2x^2}$ es $3x^2-2xy+y^2-1=0.$

No debe pensarse que la ecuación (1) dada define siempre una función implícita. Puede, en efecto, no existir ninguna función continua que satisfaga a la ecuación (1), o pueden existir varias de tales funciones.

Ejemplos.

1. No existe ninguna función que satisfaga a la ecuación

$$x^2+y^2+1=0.$$

2. Las funciones $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ satisfacen una misma ecuación, a saber: $x^2+y^2-1=0.$

17. Teorema de la existencia de una función implícita.

Si una función z = F(x, y), continua en conjunto con sus primeras derivadas parciales en la vecindad de un -- punto (a, b), satisface las condiciones:

1) $F(a, b)=0,$

2) $F'_y(a, b)\neq 0,$

existirá una y solamente una función y = f(x), definida y continua en la vecindad del punto x = a, tal que

1) $f(a)=b,$

2) $F[x, f(x)]=0.$

La demostración de este teorema será omitida dada su complejidad.

Ejemplo. Sea

$$F(x, y)=xy+x+y-1.$$

Tenemos:

$$F'_y=x+1.$$

Haciendo a = 2, b = - 1/3, obtenemos:

$$F\left(2, -\frac{1}{3}\right)=0, \quad F'_y\left(2, -\frac{1}{3}\right)=3\neq 0.$$

Por consiguiente de acuerdo con nuestro teorema existe una y solamente una función y = f(x), continua en la vecindad del punto x = 2, que

adquiere el valor -1/3 en este punto y que satisface a la ecuación

$$F(x, y) = 0.$$

Lo mismo puede decirse sobre cualquier otro punto (a, b) que satisfaga las condiciones $ab + a + b - 1 = 0$, $a + 1 \neq 0$. En nuestro ejemplo podemos encontrar la función desconocida al resolver la ecuación F(x, y) = con respecto á y.

18. Derivada de una función implícita. Aceptemos que la función $y = f(x)$, continua en la vecindad del punto $x = a$, está dada en forma implícita por $F(x, y) = 0$. Admitamos también que la función $z = F(x, y)$ es continua en conjunto con sus derivadas parciales de primer orden en la vecindad del punto $x = a$, $y = f(a)$, $f(a) = b$ ý que $F'_y(a, b) \neq 0$.

Representemos por Δx un incremento arbitrario de la variable x. Hagamos.

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a);$$

tenemos, por consiguiente,

$$F(a + \Delta x; \ b + \Delta y) - F(a, b) = 0$$

Procediendo como lo hicimos en la Pág.179, obtenemos:

$$F(a + \Delta x, \ b + \Delta y) - F(a, b) =$$
$$= F'_x(a + \theta\Delta x, \ b + \Delta y)\Delta x + F'_y(a, \ b + \theta_1\Delta y)\Delta y = 0. \qquad (1)$$

Puesto que $F'_y(x, y)$ es una función continua y como $F'_y(a, b) \neq 0$, entonces para un incremento Δy suficientemente pequeño tenemos también

$$F'_y(a, \ b + \theta_1\Delta y) \neq 0.$$

Por lo que, para Δx , Δy suficientemente pequeños, de (1) puede deducirse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(a + \theta\Delta x, \ b + \Delta y)}{F'_y(a, \ b + \theta_1\Delta y)}. \qquad (2)$$

Cuando Δx tiende a cero, en virtud de la continuidad de la función $y = f(x)$, el incremento Δy también tiende a cero.

Así pues, el miembro derecho de la igualdad (2) tiene por límite

$$-\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

Por tanto

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

Luego hemos demostrado la siguiente proposición:

Teorema. Si la función continua $y = f(x)$ dada en forma implícita por la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene derivadas F'_y y F'_y continuas también entonces la función-

$y=f(x)$ tiene derivada para todo valor de x, para el que $F'_y[x, f(x)]\neq 0$, y esta derivada se expresa por la fórmula

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (3)$$

Nos ocuparemos ahora de la determinacion de la segunda derivada de una función implícita.

Podemos considerar a la derivada y' como una función compuesta formada por la función continua $-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ y por la función, continua también, $y=f(x)$.

Si a las condiciones anteriores agregamos todavía la condición de que la función $F(x, y)$ tenga segundas derivadas parciales continuas entonces del teorema sobre la derivada de una función compuesta y de (3) se desprende la existencia de y''.

Aplicando la fórmula (4) (pág.180), obtenemos:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{F'_x}{F'_y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{F'_x}{F'_y}\right]y'.$$

Así pues,

$$y''=-\frac{F'_yF''_{x^2}-F'_xF''_{xy}}{(F'_y)^2}-\frac{F'_yF''_{xy}-F'_xF''_{y^2}}{(F'_y)^2}\cdot\left[-\frac{F'_x}{F'_y}\right]$$

De donde

$$y''=-\frac{(F'_y)^2F''_{x^2}-2F''_{xy}F'_xF'_y+(F'_x)^2F''_{y^2}}{(F'_y)^3},$$

ó

$$y''=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

Fórmulas análogas se obtienen para las derivadas de orden superior, aunque resultan demasiado complicadas.

Observación. Procede advertir que en las fórmulas obtenidas para las derivadas el símbolo y representa una función de la variable x definida por la ecuación $F(x, y)=0$; los miembros derechos de estas fórmulas son, por consiguiente, funciones de una variable, esto es, de la variable x y no de las dos variables x é y, como lo parece a primera vista.

Ejemplos.

1. $F(x, y)=x^2+y^2-1=0.$

Tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Por tanto

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{1}{y^3}.$$

Diferenciando la segunda derivada y considerándola como una función compuesta, obtenemos:

$$y''' = \frac{3y^2y'}{y^6} = -\frac{3x}{y^5}.$$

2. $F(x, y) = y - xe^y + x = 0$

Tenemos:

$$F'_x = -e^y + 1, \quad F'_y = 1 - xe^y,$$

por consiguiente,

$$y' = \frac{e^y - 1}{1 - xe^y}.$$

3. sen (x + y) - y = 0.

$$y' = -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y) - 1}, \quad y'' = \frac{\sin(x+y)}{[\cos(x+y) - 1]^3}.$$

19. Máximos y mínimos de funciones implícitas. Sea la función z = F(x, y) continua en conjunto con sus derivadas parciales hasta el segundo orden, inclusive, en el dominio Ω . Consideremos el problema de la determinación de los valores extremos de una función dada implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$.

Citemos las condiciones necesarias más simples. Para ello encontremos puntos (x, y), que satisfagan las condiciones:

$$F(x, y) = 0,$$
$$F'_x(x, y) = 0,$$
$$F'_y(x, y) \neq 0.$$

Si existe un punto (x_0, y_0) que satisfaga estas condiciones, entonces en virtud de los teoremas anteriores (Pág.180 y siguientes) existe una función y = f(x), continua en conjunto con sus derivadas de primer y segundo orden que satisfacen la ecuación (1) en la vecindad del punto $x = x_0$ y que adquiere, para $x = x_0$, un valor $y = y_0$.

Observemos además que

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = 0.$$

Como $F'_x(x_0, y_0) = 0$, entonces, aplicando la fórmula para la derivada segunda de una función implícita (Pág.183), obtenemos:

$$f''(x_0) = -\frac{F''_{x^2}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Por consiguiente, si $F''_{x^2}(x_0, y_0) \neq 0$, la función y = f(x) tendrá un valor extremo en el punto $x = x_0$. Este será un máximo propio o un mínimo, dependiendo de que $F''_{x^2}(x_0, y_0)$ o $F'_y(x_0, y_0)$ tengan un mismo signo ó signos diferentes. Si $F''_{x^2}(x_0, y_0) = 0$, entonces es necesario investigar las derivadas de orden superior.

Ejemplo. Sea

$$F(x,\ y)=y^3-3xy+x^3=0.$$

Tenemos:

$$F'_x=-3y+3x^2,\quad F'_y=3y^2-3x.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $F(x,\ y)=0$ y $F'_x(x,\ y)=0$ obtenemos dos soluciones:

$$x_1=0,\ y_1=0 \ \text{ y } \ x_2=\sqrt[3]{2},\ y_2=\sqrt[3]{4}.$$

Tenemos:

$$F'_y(x_1,\ y_1)=0,\quad F_y(x_2,\ y_2)=3\sqrt[3]{2}.$$

De donde se ve que la primera solución es desechable. Además,

$$F''_{x^2}(x_2,\ y_2)=6x_2=6\sqrt[3]{2}.$$

Puesto que $F''_{x^2}(x_2,\ y_2)$ y $F'_y(x_2,\ y_2)$ tienen el mismo signo, tendrá lugar un máximo propio.

PROBLEMAS

Comprobar, en los problemas 1-4, los resulta os determinando y de la ecuación $F(x,\ y)=0$.

1. $F(x,\ y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0;$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}}{(Bx+Cy+E)^3}.$$

2. $F(x,\ y)=x^3-3cxy+y^3=0;$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{cy-x^2}{cx-y^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2c^3xy}{(cx-y^2)^3}.$$

3. $F(x,\ y)=y^x-x^y=0;\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}.$

4. $F(x,\ y)=e^y+ax^2e^{-y}-2bx=0;\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}.$

5. Demostrar que la función implícita dada por la ecuación

$$F(x,\ y)=y^4-4a^2xy+x^4=0,$$

tiene un valor extremo para

$$x=\pm a\sqrt[8]{3},\quad y=\pm a\sqrt[8]{27}.$$

Investigar si éste es un máximo o un mínimo.

6. Investigar los valores extremos de las funciones de los problemas 1 y 2.

7. Demostrar que en todos los triángulos de altura w dada y de área P conocida, el de menor perímetro es el isósceles cuya base es $\frac{2P}{w}$ y su altura w

CAPITULO X

FORMULA Y SERIE DE TAYLOR. MAXIMOS Y MINIMOS. DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

FORMULA Y SERIE DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

1. Fórmula de Taylor. Sea una función f(x, y) continua en conjunto con todas sus derivadas parciales, hasta la de enésimo orden inclusive, en la vecindad de un punto (x, y). Sea el punto (x + h, y + k) perteneciente a esta vecindad. Considerando constantes á x, y, h, k podemos tratar la expresión f(x + h , y + k) como una función de la variable t. Hagamos, por consiguiente,

$$\varphi(t)=f(x+ht, \quad y+kt)$$

Encontremos las derivadas de la función $\varphi(t)$, mediante el teorema sobre la derivada de una función compuesta (Pág.179). Para ello hagamos:

$$u=x+ht,$$
$$v=y+kt,$$

Así que

$$\varphi(t)=f(u, \ v).$$

Diferenciando con respecto á t, obtenemos:

$$\varphi'(t)=f'_u(u, \ v)\frac{du}{dt}+f'_v(u, \ v)\frac{dv}{dt},$$

de donde

$$\varphi'(t)=f'_u(u, \ v)h+f'_v(u, \ v)k.$$

Volviendo a la notación anterior, obtenemos

$$\varphi'(t)=hf'_x(x+ht, \ y+kt)+kf'_y(x+ht, \ y+kt).$$

Análogamente encontramos:

$$\varphi''(t)=h^2f''_{x^2}(x+ht, \ y+kt)+$$
$$+2hkf''_{xy}(x+ht, \ y+kt)+k^2f''_{y^2}(x+ht, \ y+kt)$$

Esta derivada puede escribirse simbólicamente en la forma

$$\varphi''(t)=[hf'_x(x+ht, \ y+kt)+kf'_y(x+ht, \ y+kt)]^{(2)}.$$

Calculando la derivada siguiente, obtenemos:

$$\varphi'''(t)=h^3f'''_{x^3}(x+ht, \ y+kt)+3h^2kf'''_{x^2y}(x+ht, \ y+kt)+$$
$$+3hk^2f'''_{xy^2}(x+ht, \ y+kt)+k^3f'''_{y^3}(x+ht, \ y+kt),$$

simbólicamente:

$$\varphi'''(t)=[hf'_x(x+ht,\ y+kt)+kf'_y(x+ht,\ y+kt)]^{(3)}.$$

Por inducción encontramos:

$$\varphi^{(n)}(t)=[hf'_x(x+ht,\ y+kt)+kf'_y(x+ht,\ y+kt)]^{(n)}.$$

Observemos ahora que aplicando a la función $\varphi(t)$ la fórmula de Maclaurin y haciendo $t = 1$, obtenemos:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)+R_n.$$

El término del residuo puede escribirse, por ejemplo, en la forma de -- Lagrange:

$$R_n=\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta)\quad(0<\theta<1).$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\varphi(1)=f(x+h,\ y+k),\\
&\varphi(0)=f(x,\ y),\\
&\varphi'(0)=hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y),\\
&\varphi''(0)=h^2f''_{x^2}(x,\ y)+2hkf''_{xy}(x,\ y)+k^2f''_{y^2}(x,\ y)=\\
&\qquad=[hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y)]^{(2)},
\end{aligned}$$

en general,

$$\varphi^{(n)}(0)=[hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y)]^{(n)}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\frac{1}{1!}[hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y)]+\\
+\frac{1}{2!}[hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y)]^{(2)}+\ldots\\
\ldots+\frac{1}{(n-1)!}[hf'_x(x,\ y)+kf'_y(x,\ y)]^{(n-1)}+R_n;
\end{aligned}$$

para el término del residuo tenemos la fórmula

$$R_n=\frac{1}{n!}[hf'_x(x+\theta h,\ y+\theta k)+kf'_y(x+\theta h,\ y+\theta k)]^{(n)}$$

$$(0<\theta<1).$$

Así pues, hemos obtenido la fórmula de Taylor para una función de dos variables. Si tomamos, en particular, $x = 0$, $y = 0$, entonces substituyendo en la fórmula de Taylor $x = 0$, $y = 0$ y despues escribimos x é y en lugar de h y k, obtenemos la fórmula de Maclaurin para una función de - dos variables en la forma

$$f(x, y)=f(0, 0)+\frac{1}{1!}[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)]^{(2)}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{(n-1)!}[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)]^{(n-1)}+R_n,$$

donde

$$R_n=\frac{1}{n!}[xf'_x(\theta x, \theta y)+yf'_y(\theta x, \theta y)]^{(n)}.$$

Observación. De la fórmula de Taylor, para $n = 1$, obtenemos el teorema sobre el valor medio para una función de dos variables:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=$$
$$=hf'_x(x+\theta h, y+\theta k)+kf'_y(x+\theta h, y+\theta k) \quad (0<\theta<1).$$

2. Series de Taylor y de Maclaurin. Admitamos que la función $f(x,y)$ es continua en conjunto con sus derivadas parciales de todos los órdenes de la vecindad de cierto punto (x, y). Representemos por $(x + h, y + k)$ un punto arbitrario de esta vecindad, y por n un número natural arbitrario. Por lo anterior, tenemos (ver Par. 1):

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+\frac{1}{1!}[hf'_x(x, y)+kf'_y(x, y)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[hf'_x(x, y)+kf'_y(x, y)]^{(2)}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{(n-1)!}[hf'_x(x, y)+kf'_y(x, y)]^{(n-1)}+R_n.$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0,$$

obtendremos el desarrollo de nuestra función en una serie convergente

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+\frac{1}{1!}[hf'_x(x, y)+kf'_y(x, y)]+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{n!}[hf'_x(x, y)+kf'_y(x, y)]^{(n)}+\dots,$$

que denominaremos Serie de Taylor.

Si, en particular, se hace $x = 0$, $y = 0$ y en lugar de h y k se escriben x é y, obtendremos la serie de Maclaurin:

$$f(x, y)=f(0, 0)+\frac{1}{1!}[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)]+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{n!}[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)]^{(n)}+\dots$$

Ejemplos.

1. $e^{x+y}=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\ldots$

2. $\sin x\sin y=$

$$=\frac{1}{2!}2xy-\frac{1}{4!}(4x^3y+4xy^3)+\frac{1}{6!}(6x^5y+20x^3y^3+6xy^5)+\ldots$$

3. $$\operatorname{arctg}\frac{x+h}{y+k}=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{1}{1!}\left[\frac{y}{x^2+y^2}h-\frac{x}{x^2+y^2}k\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}h^2+\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}hk+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}k^2\right]+\ldots$$

MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

3. Definición de valor extremo. Se dice que la función $z = f(x, y)$ adquiere un valor máximo en algún punto, si en cada uno de los puntos de su vecindad el valor de la función no es mayor que su valor en el punto dado. Substituyendo en esta definición la expresión "no es mayor" por el término "menor" obtenemos la definición de un máximo propio.

De las definiciones anteriores con las modificaciones adecuadas, obtenemos la definición de un mínimo.

Así pues, si en un punto (x', y') tiene lugar un máximo existirá cierta vecindad del punto (x', y') tal que para todo punto $(x'+h, y'+k)$ perteneciente a ella se satisfará la desigualdad.

$$f(x'+h, y'+k)\leqslant f(x', y');$$

en el caso de un máximo propio tenemos, evidentemente,

$$f(x'+h, y'+k)<f(x', y'),$$

si h y k no son nulos simultáneamente.

Para los mínimos tienen lugar las desigualdades inversas.

Así que en ambos casos puede afirmarse que en los puntos de los valores extremos la expresión $f(x'+h, y'+k) - f(x', y')$, para valores suficientemente pequeños de h y k, tiene un signo constante. Si tiene lugar un máximo propio la expresión anterior, para h y k suficientemente pequeños es diferente de cero, excepto para $h = k = 0$.

4. Condiciones necesarias para la existencia de un valor extremo. Admitamos que la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales de primer orden continuas en la vecindad del punto (x', y') y que en dicho punto adquiere un valor extremo.

De la definición de valor extremo se desprende que la función $f(x, y')$ considerada como una función de una variable x, para $x = x'$, también tiene un valor extremo, Por tanto

$$f'_x(x', y')=0.$$

Análogamente obtenemos:

$$f'_y(x', y')=0.$$

Luego hemos demostrado el siguiente

Teorema . Si la función $z = f(x, y)$, continua en conjunto con sus derivadas parciales de primer orden en la vecindad de un punto (x', y') tiene un valor extremo en dicho punto, entonces ambas primeras derivadas parciales son nulas en este punto.

5. Condición suficiente para la existencia de un valor extremo. Si una función $f(x, y)$, continua en conjunto con sus derivadas parciales de primero y segundo orden en la vecindad de un punto (x', y') satisface las condiciones

$$f'_x(x', y')=0, \quad f'_y(x', y')=0,$$

entonces, haciendo

$$\Delta=f''_{x^2}(x', y')f''_{y^2}(x', y')-[f''_{xy}(x', y')]^2,$$

podremos afirmar que:

a) para $\Delta>0$ en el punto (x', y') la función tiene un valor extremo que será

un máximo propio, si $f''_{x^2}(x', y')<0$,

un mínimo propio, si $f''_{x^2}(x', y')>0$;

b) para $\Delta<0$ no se tendrá un valor extremo en el punto (x', y');

c) para $\Delta=0$ puede tenerse o no un valor extremo.

Observación. En el caso a) las derivadas $f''_{x^2}(x', y')$ y $f''_{y^2}(x', y')$ son diferentes de cero y tiene el mismo signo, ya que de lo contrario no sería posible $\Delta\leqslant 0$. .

Demostración.

a) Admitamos que $\Delta>0$. . Aplicando la fórmula de Taylor bajo las condiciones

$$f'_x(x', y')=f'_y(x', y')=0,$$

obtenemos:

$$f(x'+h, y'+k)-f(x', y')=\frac{1}{2!}[h^2r+2hks+k^2t], \qquad (1)$$

donde

$$r=f''_{x^2}(x'+\theta h, y'+\theta k),$$
$$s=f''_{xy}(x'+\theta h, y'+\theta k),$$
$$t=f''_{y^2}(x'+\theta h, y'+\theta k).$$

La anterior fórmula puede escribirse en la forma siguiente:

$$f(x'+h, y'+k)-f(x', y')=\frac{1}{2!}\frac{1}{r}[(hr+ks)^2+(rt-s^2)k^2]. \qquad (2)$$

Aceptemos ahora que $f''_{x^2}(x', y') > 0$. De la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden se deduce

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} r = f''_{x^2}(x', y') > 0,$$

y también

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} (rt - s^2) = \Delta > 0.$$

Por lo que, para h y k suficientemente pequenas

$$r > 0, \; rt - s^2 > 0.$$

Por consiguiente, en virtud de (2)

$$f(x'+h, y'+k) - f(x', y') \geqslant 0.$$

La igualdad es posible solamente cuando h = k = 0. De consiguiente en el punto (x', y') tiene lugar un mínimo propio.

En la demostración supusimos que $f''_{x^2}(x', y') > 0$; Admitamos que $f''_{x^2}(x', y') < 0$ y procediendo de manera semejante se puede demostrar que en el punto (x', y') tiene lugar un máximo propio.

b) Supongamos que $\Delta < 0$, y hagamos

$$r_0 = f''_{x^2}(x', y'),$$
$$s_0 = f''_{xy}(x', y'),$$
$$t_0 = f''_{y^2}(x', y').$$

Observemos que el polinomio

$$r_0 + 2s_0 x + t_0 x^2$$

no conserva un signo constante, ya que el discriminante

$$r_0 t_0 - s_0^2 < 0.$$

Existen, por tanto, dos valores β_1 y β_2 tales que

$$r_0 + 2s_0\beta_1 + t_0\beta_1^2 > 0,$$
$$r_0 + 2s_0\beta_2 + t_0\beta_2^2 < 0.$$

Es evidente que a causa de la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} (r + 2s\beta_1 + t\beta_1^2) = r_0 + 2s_0\beta_1 + t_0\beta_1^2 > 0.$$

Por consiguiente, existe una vecindad (δ) del punto (x', y') tal que si (x'+ h, y'+ k), pertenece a (δ), tendremos

$$r + 2s\beta_1 + t\beta_1^2 > 0. \qquad (3)$$

Tomemos ahora una vecindad (δ') arbitrariamente pequeña del punto --- (x', y') podremos siempre elegir un número ρ, tan pequeño que el punto $(x'+\rho, y'+\rho\beta_1)$ pertenezca tanto a δ', como a δ. Haciendo

$$h=\rho, \; k=\rho\beta_1,$$

tendremos, en virtud de (1) y (3):

$$f(x'+h, y'+k)-f(x', y')=\frac{1}{2!}\rho^2[r+2s\beta_1+t\beta_1^2]>0.$$

Así pues, en toda vecindad de un punto (x', y') existe un punto $(x'+h, y'+k)$ tal que

$$f(x'+h, y'+k)-f(x', y')>0.$$

Procediendo de manera análoga con el valor β_2, demostramos que en toda vecindad de un punto (x', y') existe también otro punto $(x'+h, y'+k)$, para el cual

$$f(x'+h, y'+k)-f(x', y')<0.$$

Así que en el punto (x', y') no se tiene un valor extremo.

c) $\Delta=0$. En este caso se observa que para la funciónes

$$z=x^4+y^4,$$
$$z=x^3+y^3$$

tenemos $\Delta=0$. en el punto (0, 0). La primera de estas funciones tiene un mínimo en este punto y la segunda no lo tiene.

Ejemplos.

1. $z=x^2+xy+y^2-mx-ny.$

Tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-m, \; \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-n,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2, \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=1,$$
$$\Delta=2\cdot 2-1^2=3.$$

Para encontrar los puntos en los que es posible el valor extremo, resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \; \frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

esto es,

$$2x+y-m=0,$$
$$x+2y-n=0.$$

La solución única de este sistema será

$$x'=\frac{1}{3}(2m-n), \; y'=\frac{1}{3}(2n-m).$$

Por cuanto

$$\Delta=3>0,$$

en el punto (x', y') existe un valor extremo. Como

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2>0,$$

en el punto

$$x' = \frac{1}{3}(2m - n), \quad y' = \frac{1}{3}(2n - m)$$

nuestra función tiene un máximo.

2.

$$2. \ z = Ax^2y + Bxy^2 - Cxy \qquad (A, B, C \neq 0);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2Axy + By^2 - Cy, \ \frac{\partial z}{\partial y} = Ax^2 + 2Bxy - Cx,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2Ay, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 2Ax + 2By - C, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2Bx,$$

$$\Delta = 4ABxy - (2Ax + 2By - C)^2.$$

Resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

es decir

$$(2Ax + By - C)\, y = 0,$$
$$(Ax + 2By - C)\, x = 0.$$

De las que obtenemos las cuatro soluciones:

$$x = 0, \ y = 0; \qquad x = \frac{C}{A}, \ y = 0;$$
$$x = 0, \ y = \frac{C}{B}; \qquad x = \frac{C}{3A}, \ y = \frac{C}{3B}.$$

Los valores correspondientes de Δ serán:

$$-C^2, \ -C^2, \ -C^2, \ \frac{1}{3}C^2.$$

Las tres primeras soluciones no dan un valor extremo ya que $\Delta < 0$. Para

$$x = \frac{C}{3A}, \quad y = \frac{C}{3B}$$

tenemos un valor extremo. Substituyendo estos valores en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ obtenemos $\frac{2AC}{3B}$ Tenemos, por consiguiente, un máximo o un mínimo dependiendo de que

$$\frac{AC}{B} < 0 \ \text{ o } \ \frac{AC}{B} > 0$$

PROBLEMAS

1. $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

(máx: x = 21 y = 20).

2. $z = x^2y^2(6 - x - y)$

(máx: x = 3, y = 2).

3. $z = a^2x^2 + 2b\,xy + c^2y^2 - ex - gy$

en la suposición que $a^2c^2 > b^2$

$$\left(\text{min}: x = \frac{c^2e - bg}{2(a^2c^2 - b^2)},\ y = \frac{a^2g - be}{2(a^2c^2 - b^2)}\right).$$

4. $z = x^3 + y^3 + 3xy$

(máx: x = -1, y = -1).

5. $z = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$

(mín: x = 0, y = 0; máx: x= 0, y = $\pm$ 1).

6. $z = x^3 + xy^2 + 3a\,xy$ $(a > 0)$

$$\left(\text{min}: x = \frac{a}{2}\sqrt{3},\ y = \frac{3a}{2};\ \text{max}:\ x = -\frac{a}{2}\sqrt{3},\ y = \frac{3a}{2}\right).$$

7. Encontrar el triángulo de mayor área p con un perímetro dado 2s. (Emplear la fórmula $P = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$; donde x é y representan dos de los lados del triángulo).

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

6 Definición de diferencial. Sea una función z = f(x, y) continua en conjunto con sus derivadas parciales de primer orden en la vecindad de un punto (x, y) . Designemos con Δx, Δy los incrementos arbitrarios de las variables x, y. La expresión:

$$f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y$$

recibe el nombre de diferencial total de la función z =f(x, y) con respecto a las variables x, y. La diferencial total se representará por el símbolo $d_{xy}z$. Escribiendo en lugar de Δx, Δy los símbolos $d_{xy}x$, $d_{xy}y$, , obtenemos:

$$d_{xy}z = f'_x(x, y)\,d_{xy}x + f'_y(x, y)\,d_{xy}y. \qquad (1)$$

7. Diferencial de una función compuesta. Admitamos ahora que las variables x, y, son funciones continuas de otras variables u, v:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

Supongamos además que las funciones φ y ψ tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Podemos, por tanto, considerar a la variable z como una función compuesta de las variables u, v, a saber,

$$z = f[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)] = F(u, v).$$

De donde

$$d_{uv}z = F'_u(u,\ v)\, d_{uv}u + F'_v(u,\ v)\, d_{uv}v.$$

De acuerdo con el teorema sobre las derivadas de funciones compuestas, tenemos:

$$F'_u(u,\ v) = f'_x(x,\ y)\frac{\partial x}{\partial u} + f'_y(x,\ y)\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$F'_v(u,\ v) = f'_x(x,\ y)\frac{\partial x}{\partial v} + f'_y(x,\ y)\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Substituyendo estas expresiones en la fórmula (2), obtenemos:

$$d_{uv}z = \left[f'_x(x,\ y)\frac{\partial x}{\partial u} + f'_y(x,\ y)\frac{\partial y}{\partial u}\right] d_{uv}u + \\ + \left[f'_x(x,\ y)\frac{\partial x}{\partial v} + f'_y(x,\ y)\frac{\partial y}{\partial v}\right] d_{uv}v,$$

por consiguiente,

$$d_{uv}z = f'_x(x,\ y)\left[\frac{\partial x}{\partial u} d_{uv}u + \frac{\partial x}{\partial v} d_{uv}v\right] + \\ + f'_y(x,\ y)\left[\frac{\partial y}{\partial u} d_{uv}u + \frac{\partial y}{\partial v} d_{uv}v\right]$$

Como las expresiones dentro de los paréntesis son las diferenciales $d_{uv}x$, $d_{uv}y$, tendremos

$$d_{uv}z = f'_x(x,\ y)\, d_{uv}x + f'_y(x,\ y)\, d_{uv})y. \qquad (3)$$

8. Aplicación a funciones de una variable. Convengamos en que las variables x, y, son funciones continuas de una variable t y que tienen derivadas continuas de primer orden. De suerte que,

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t).$$

Por consiguiente la variable z puede considerarse como una función compuesta de la variable t:

$$z = f[\varphi(t),\ \phi(t)] = F(t).$$

De donde

$$d_t z = F'(t)\, d_t t.$$

Según el teorema sobre las derivadas de una función compuesta, tenemos:

$$F'(t) = f'_x(x,\ y)\, x'_t + f'_y(x,\ y)\, y'_t,$$

por tanto

$$d_t z = f'_x(x,\ y)\, x'_t d_t t + f'_y(x,\ y)\, y'_t d_t t.$$

Como

$$x'_t d_t t = d_t x, \quad y'_t d_t t = d_t y,$$

entonces

$$d_t z = f'_x(x, y)\, d_t x + f'_y(x, y)\, d_t y.$$

9. Caso en que una de las variables es función de la otra. Supongamos, por último, que la variable y es función de la variable x, y que posee primera derivada continua. Así que

$$y = \varphi(x).$$

La variable z puede considerarse como una función compuesta de la variable x:

$$z = f[x, \varphi(x)] = F(x),$$

por consiguiente,

$$d_x z = F'_x(x)\, d_x x.$$

Según el teorema sobre las derivadas de una función compuesta, tenemos:

$$F'_x(x) = f'_x(x, y) + f'_y(x,y)\, y'_x,$$

por tanto

$$d_x z = f'_x(x,y)\, d_x x + f'_y(x,y)\, y'_x d_x x.$$

Como

$$d_x y = y'_x d_x x,$$

entonces

$$d_x z = f'_x(x, y)\, d_x x + f'_y(x, y)\, d_x y.$$

Comparando las fórmulas (1) , (3) , (4) , (5) ; vemos que todas ellas pueden presentarse simbólicamente en la forma única:

$$dz = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy$$

ó

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (6)$$

Los símbolos dx, dy, dz no son los mejores, pero de (6) obtenemos las fórmulas (1), (3) , (4) , (5) substituyendo , siempre, en lugar de d los símbolos d_{xy}, d_{uv}, d_t, d_x.

10. Diferenciales parciales. Si la variable y asume algún valor constante, entonces la expresión

$$f'_x(x,y)\, dx$$

será la diferencial de la función f(x, y) considerada como una función de la variable x. La expresión $f'_x(x,y)\,dx$ se llama diferencial parcial --

con respecto a la variable x. Análogamente, la expresión $f'_y(x,y)\,dy$ se llama diferencial parcial con respecto a la variable y. Por consiguiente, puede decirse que: la diferencial total es la suma de las diferenciales parciales.

11. Diferencial e incremento de una función. Ocupémonos ahora de la relación entre la diferencial total dz y el incremento total

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$$

de la variable z.

Según el teorema sobre el valor medio (Pág.188), tenemos:

$$\Delta z = f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\,\Delta y,$$

de donde

$$\Delta z - dz = [f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y) - f'_x(x,\ y)]\,\Delta x + \\ + [f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y) - f'_y(x,\ y)]\,\Delta y$$

Las expresiones dentro de los paréntesis tienden a cero ya que las derivadas primeras se han considerado continuas. Como

$$\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant 1, \qquad \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant 1,$$

siempre que Δx y Δy no sean nulas simultáneamente, entonces

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

En cálculos prácticos, cuando se trata solamente de valores aproximados puede, para Δx y Δy suficientemente pequeños, tomarse

$$\Delta z \approx dz.$$

PROBLEMAS

1. Suponiendo que las variables u y v son funciones continuas de las variables $x, y,$ y que poseen primeras derivadas continuas, demostrar que

1) $d(u+v) = du + dv;$

2) $d(uv) = u\,dv + v\,du;$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Demostremos, por ejemplo, la fórmula (2) :

$$d(uv) = \frac{\partial (uv)}{\partial x}dx + \frac{\partial (uv)}{\partial y}dy = \\ = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy,$$

como

$$d(uv) = u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right),$$

por consiguiente,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

2. Calcular las diferenciales de las siguientes funciones:

$$z = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3,$$
$$dz = 3(3x - 2y)^2(3dx - 2dy);$$

$$z = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}, \qquad dz = -\frac{4(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^3};$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \qquad dz = \frac{-\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2};$$

$$z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}, \qquad dz = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{y^2 \sin\frac{2x}{y}};$$

$$z = \arccos\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}, \qquad dz = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}.$$

12. Diferenciales de orden superior. Si aceptamos que dx y dy son cantidades constantes, entonces dz será una función de las variables x, y. Podemos, por tanto, hablar sobre la diferencial de una diferencial.

La segunda diferencial o diferencial de segundo orden será la diferencial de la diferencial; análogamente se definen las diferenciales de orden superior. Simbólicamente se representan en la siguiente forma:

$$d\,dz = d^2z$$
$$dd^2z = d^3z,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$dd^{n-1}z = d^nz.$$

Ejemplos. Determinar las diferenciales (con respecto á x, y) de orden superior de la función $z = f(x, y)$, continua en conjunto con sus derivadas parciales, hasta la de orden n, inclusive.

En este caso consideramos á dx y dy como números constantes, por consiguiente,

$$d^2x = d^3x = \ldots = d^nx = 0,$$
$$d^2y = d^3y = \ldots = d^ny = 0$$

así que,

$$dz = f'_x dx + f'_y dy,$$
$$d^2z = [f''_{x^2}dx + f''_{xy}dy]\,dx + [f''_{xy}dx + f''_{y^2}dy]\,dy,$$

por tanto

$$d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2.$$

Análogamente

$$d^3z = f'''_{x^3}dx^3 + 3f'''_{x^2y}dx^2dy + 3f'''_{xy^2}dx\,dy^2 + f'''_{y^3}dy^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^nz = f^{(n)}_{x^n}dx^n + \binom{n}{1} f^{(n)}_{x^{n-1}y}dx^{n-1}dy + \ldots + f^{(n)}_{y^n}dy^n.$$

Simbólicamente, escribimos:

$$d^nz = (f'_x dx + f'_y dy)^{(n)}.$$

Observación. Si hubiésemos supuesto que x é y eran funciones de las variables u, v entonces no hubiéramos podido hacer $d^2_{uv}x = 0$ o $d^2_{uv}y = 0$. En ese caso se hubiera obtenido una fórmula considerablemente más complicada. Por ejemplo:

$$d^2z = [f''_{x^2}dx + f''_{xy}dy]\,dx + [f'_x d^2x] +$$
$$+ [f''_{xy}dx + f''_{y^2}dy]\,dy + [f'_y d^2y],$$

por consiguiente,

$$d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y.$$

PROBLEMAS

1. $z = \sin x \cos y,$

$$dz = \cos x \cos y\,dx - \sin x \sin y\,dy,$$
$$d^2z = -\sin x \cos y\,dx^2 - 2\cos x \sin y\,dx\,dy - \sin x \cos y\,dy^2,$$
$$d^3z = -\cos x \cos y\,dx^3 + 3\sin x \sin y\,dx^2dy -$$
$$- 3\cos x \cos y\,dx\,dy^2 + \sin x \sin y\,dy^3.$$

2. $z = y \ln x,$

$$dz = \frac{y}{x}dx + \ln x\,dy,$$
$$d^2z = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dx\,dy,$$
$$d^3z = \frac{2y}{x^3}dx^3 - \frac{3}{x^2}dx^2dy.$$

3. Calcular las diferenciales de segundo y tercer orden de las ----- funciones propuestas en el problema 2 de la Pág.199 .

CAPITULO XI

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

1. Dominios. Llamaremos punto del espacio de tres dimensiones al trío de números (x, y, z) Punto del espacio de cuatro dimensiones a los cuatro numeros (x, y, z, t). Análogamente definiremos el punto de un espacio de varias dimensiones.

Observacion 1. El trio de números (x, y, z) puede considerarse como las coordenadas de algún punto del espacio en el cual se han tomado tres ejes OX, OY, OZ, mutuamente perpendiculares. Esta interpretación geométrica es imposible para los cuatro números (x, y, z, t)

Llamaremos vecindad del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del espacio de tres dimensiones a la interioridad de la esfera con centro en el punto P. Luego, la vecindad del punto P es el conjunto de los puntos (x, y, z), que satisfacen la desigualdad

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2,$$

donde r es un número arbitrario fijado de antemano. Asimismo la vecindad del punto $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ es el conjunto de puntos (x, y, z, t),

que satisfacen la desigualdad

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2<r^2. \qquad (1)$$

Observación 2. Llamaremos esfera en el espacio de cuatro dimensiones con centro en el punto (x, y, z, t), al conjunto de puntos (x_0, y_0, z_0, t_0).

que satisfacen la desigualdad

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2\leq r^2,$$

El conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad (1) se designa con el nombre de interioridad de esta esfera.

El dominio y los puntos fronteros en un espacio de varias dimensiones se define al igual que en el espacio de dos dimensiones. Procede solamente substituir el concepto de vecindad en el espacio de dos dimensiones por el concepto de vecindad en el espacio de varias dimensiones.

Ejemplos.

1. Dominios de tres dimensiones son la interioridad de un cubo, de un paralelepípedo recto, de una esfera, etc. Las fronteras de estos dominios son, respectivamente, la superficie del cubo, del paralelepípedo recto, de la esfera.

2. El conjunto de puntos (x, y, z, t), que satisfacen las desigualdades:

$$a \leq x \leq a', \quad b \leq y \leq b', \quad c \leq z \leq c', \quad d \leq t \leq d',$$

es un dominio cerrado de cuatro dimensiones que llamaremos intervalo (tetradimensional).

3. El conjunto de puntos (x, y, z), que satisfacen las desigualdades

$$-1 < x < 1, \ -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2},$$
$$-\sqrt{1-x^2-y^2} < z < \sqrt{1-x^2-y^2},$$

es el dominio (de la interioridad de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$).

2. Funciones de varias Variables. Sea E un conjunto arbitrario del espacio de tres dimensiones. Se dice que en el conjunto E está definida una función si a cada punto (x, y, z) del conjunto E le corresponde un número real t. La dependencia funcional se representará, como antes, por

$$t = f(x, y, z).$$

Los números x, y, z, son las variables independientes, el número t es la variable dependiente. De la misma manera se define una función de varias variables.

Ejemplos de funciones de varias variables.

1. $t = x^2+y^2+z^2$ $\qquad x, y, z;$

2. $u = x^2+y^2+z^2+t^2$ $\qquad x, y, z, t;$

3. $w = \dfrac{x+y+z}{t-1}$ $\qquad t \neq 1 \qquad x, y, z.$

3. Límite. Continuidad. Se dice que la secuencia de puntos $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ tiende al punto (x_0, y_0, z_0), si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Análogamente se definen los límites en espacios de cuatro o más dimensiones. Establecido el concepto de límite de una secuencia, definimos el concepto de límite y continuidad de una función de varias variables, de la misma manera que como lo hicimos para una función de dos variables. Los teoremas establecidos en los p.p. 8, 9 del capítulo IX (con las modificaciones adecuadas) tienen lugar también para las funciones de varias variables.

4. Derivadas Parciales. Si la función $t=f(x, y, z)$ está definida en la vecindad de un punto (x, y, z), entonces el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h},$$

si existe, recibe el nombre de primera derivada parcial, con respecto á x ý se representa por los símbolos:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \qquad f'_x(x, y, z).$$

Similarmente se definen las derivadas parciales con respecto a otras variables, y también las derivadas de una función de mayor número de variables.

Ejemplos.

1. $t = 3x^2 - 2xy + z^2$,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 6x - 2y, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 2z.$$

2. $u = 2x - 3y + zt + 2t^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = t, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = z + 4t.$$

La expresión

$$\frac{\partial^n t}{\partial x^p \, \partial y^q \, \partial z^r} \qquad (p + q + r = n)$$

representa la función que se obtiene derivando la función t, inicialmente p veces con respecto á x, después q veces con respecto á y y por último, r veces con respecto á z.

Como dos derivaciones (ver Pag.178) sucesivas pueden pormutarse, entonces la derivada parcial quedará definida si se da el número de derivaciones con respecto a cada una de las variables (con la condición de que todas las derivadas parciales sean continuas).

Ejemplos.

1. $u = y^2x^3 + t^2y^2xz^2$, $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z} = 6t^2y^2z, \quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = 6x^2 + 6t^2yz$

2. $z = \dfrac{xyt}{1 + t^2}$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y \, \partial t} = \dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}$.

5. Fórmula y Serie de Taylor. Si la función t = f(x, y, z) tiene en la vecindad de un punto (x, y, z) derivadas continuas hasta la de enésimo orden, entonces, procediendo como lo hicimos para una función de dos variables (Pag.186) obtenemos la fórmula de Taylor (y la correspondiente fórmula de Maclaurin). En el caso en que el residuo tienda a cero, obtenemos el desarrollo de nuestra función en serie de Taylor (y la correspondiente serie de Maclaurin).

Ejemplos.

1. $e^{x+y+z} = 1 + \dfrac{x+y+z}{1!} + \dfrac{(x+y+z)^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(x+y+z)^n}{n!} + \ldots$

2. $\ln \dfrac{1+x+y}{1+z} = \dfrac{x+y-z}{1} - \dfrac{(x+y)^2 - z^2}{2} + \dfrac{(x+y)^3 - z^3}{3} + \ldots$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(x+y)^{n-1} - z^{n-1}}{n} + R_n,$$

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{(x+y)^n}{(1 + \theta x + \theta y)^n} - \frac{z^n}{(1 + \theta z)^n} \right], \quad 0 < \theta < 1.$$

CAPITULO XII

LA INTEGRAL INDEFINIDA. METODOS DE INTEGRACION

1. Función Primitiva. Se dice que la función F (x) es la función primitiva de la función f(x) en un cierto intervalo (finito o no), si en cada punto de este intervalo se efectúa la relación

$$(1) \qquad \frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

Ejemplos.
1. La función y = sen x es la función primitiva de la función y = cos x en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ya que

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

2. La función $y=\sqrt{1-x^2}$ es la función primitiva de la función y = $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $(-1<x<+1)$, puesto que

$$\frac{d(\sqrt{1-x^2})}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1.$$

A la función primitiva se la llama también integral indefinida, representándosela con el símbolo

$$\int f(x)\,dx.$$

De acuerdo con (1), si C denota una constante arbitraria

$$\frac{d[F(x)+C]}{dx}=f(x).$$

Así pues, F (x) + C es también una integral indefinida de la función f(x). Puede entonces escribirse:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Inversamente, si las funciones F_1 (x) y F_2 (x) son integrales indefinidas de la función f(x), en el intervalo (a, b,), tendremos

$$\frac{d[F_1(x)-F_2(x)]}{dx}=f(x)-f(x)=0.$$

De aquí se concluye, apoyándose en el teorema sobre el valor medio (Pág.112)

$$F_1(x)-F_2(x)=\text{const.}$$

De esta manera, si se conoce una función primitiva, se pueden obtener todas las que se deseen, difiriendo éstas de la primera solo en una constante arbitraria. Cabe preguntar qué funciones poseen integrales indefinidas. Como se demostrará posteriormente, cualquier función continua posee integral indefinida.

Nota. Si se dice que la función F (x) es una integral indefinida de la función f(x) sin indicar en qué intervalo, deberá sobreentenderse que se trata de un intervalo cualquiera, en el que la función f(x) esté definida.

2. Fórmulas Fundamentales. En vez de escribir $\int 1dx$, puede escribirse $\int dx$. Entonces:

1. $\int dx = x + C$ ya que $\frac{d(x+C)}{dx} = 1$.
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \ n \neq -1,$

puesto que la derivada de la función $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$ para $n+1 \neq 0$ es x^n.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \ x > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \ x < 0.$$

Ambas fórmulas se comprueban por diferenciación. Puede substituírselas por una fórmula:

3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

De la misma manera verificamos, por diferenciación las fórmulas:

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C'.$

3. Algunas Propiedades de la Integral Indefinida. Sea en el intervalo (a, b)

$$\int f(x)\, dx = F(x), \quad \int \varphi(x)\, dx = \Phi(x).$$

Puesto que

$$\frac{d[F(x) \pm \Phi(x)]}{dx} = f(x) \pm \varphi(x),$$

se obtiene

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\, dx = F(x) \pm \Phi(x),$$

es decir,

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx.$$

Así pues, la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de todos los sumandos (si éstas existen).

Si c designa un número arbitrario,

$$\frac{d[c\,F(x)]}{dx} = c\,\frac{d\,F(x)}{dx} = c\,f(x),$$

por consiguiente

$$\int c f(x)\, dx = c\,F(x),$$

es decir,

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

Así, un factor constante puede sacarse del signo de la integral.

Ejemplos.

1. $\int (3x^2 - 2x + 7)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 7dx =$
$= 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx =$
$= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 7\cdot x + C = x^3 - x^2 + 7x + C.$

2. $\int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)dx =$
$= \int x^{-3}\,dx - \int x^{-2}\,dx + \int x^{-5}\,dx = \frac{1}{-2}x^{-2} - \frac{1}{-1}x^{-1} +$
$+ \frac{1}{-4}x^{-4} + C = \frac{-2x^2 + 4x^3 - 1}{4x^4} + C.$

3. $\int\left(5\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 3\int x^{\frac{3}{5}}\,dx -$
$-2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 5\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} - 3\frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1} -$
$-2\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{8}\sqrt[5]{x^8} - 4\sqrt{x} + C.$

4. $\int x\sqrt[m]{x}\,dx = \int x\cdot x^{\frac{1}{m}}\,dx = \int x^{\frac{1}{m}+1}\,dx = \frac{m}{2m+1}x^2\sqrt[m]{x} + C.$

5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{7}{3}}\,dx = -\frac{3}{4}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + C.$

6. $\int \frac{2x^2\sqrt[3]{x} - 5x + 3x^2e^x - 4}{x^2}\,dx =$
$= \int (2x^{\frac{1}{3}} - 5x^{-1} + 3e^x - 4x^{-2})\,dx =$
$= \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - 5\ln|x| + 3e^x + \frac{4}{x} + C.$

4. Integración por Substitución. Existen algunos métodos para la obtención de una función primitiva. Uno de ellos es el llamado método de integración por substitución o cambio de variable.

Supongamos que en el intervalo $[a, b]$

$$\int f(x)\,dx = F(x). \qquad (1)$$

Admitamos que la función $x = \varphi(t)$ y su primera derivada son continuas en el intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, y que $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ para todos los puntos t del intervalo $[\alpha, \beta]$. Como sabemos, bajo estas suposiciones la función compuesta $F[\varphi(t)]$ está definida para $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ y

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = F'[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Puesto que

$$F'(x) = f(x),$$

entonces

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

de donde

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]. \tag{2}$$

En otras palabras, si no es posible evaluar directamente la integral (1), se presenta sin embargo la posibilidad de calcular la (2), es decir, determinar la función $F[\varphi(t)]$. Conociendo esta última, es fácil obtener la función primitiva F(x) para aquellos valores de x que la función $x=\varphi(t)$ adquiere en el intervalo $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

Observemos además que en base a (1) y (2),

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \quad \text{para } x=\varphi(t). \tag{3}$$

Obtenemos formalmente esta fórmula escribiendo

$$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)\,dt.$$

Ejemplos.

1. $\int (a+bx)^n\,dx,\quad n\neq -1,\quad b\neq 0.$

Escribamos $a+bx=t$; entonces $x=\frac{t-a}{b}$. De aquí $dx=\frac{dt}{b}$, es decir,

$$\int (a+bx)^n\,dx=\int t^n\frac{dt}{b}=\frac{1}{b}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{1}{b}\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}+C.$$

2. $\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C.$

La substitución es la misma que la del ejemplo anterior.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}},\quad a>0.$

Escribamos $x=\sqrt{a}\,t,\ dx=\sqrt{a}\,dt$; entonces

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}=\int\frac{\sqrt{a}\,dt}{\sqrt{a-at^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C,$$

así que

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}+C.$$

Nota. Intercambiando las letras x y t en la fórmula (3), obtenemos

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt \quad \text{para } t=\varphi(x).$$

Obtenemos formalmente esta fórmula escribiendo

$$\varphi(x)=t$$

y

$$\varphi'(x)\,dx=dt.$$

Frecuentemente se encuentran integrales de esta forma, aunque no siempre es fácil la substitución.

Ejemplos.

4. $I=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx.$

Escribamos

$$x^2+x+1=t, \quad (2x+1)\,dx=dt.$$

En otras palabras

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C,$$

consecuentemente

$$I=\ln|x^2+x+1|+C.$$

5. $I=\int(a+bx^2)^n x\,dx$, $(b\neq 0, \quad n\neq -1)$.

Escribamos

$$a+bx^2=t, \; 2bx\,dx=dt.$$

Entonces

$$x\,dx=\frac{1}{2b}\,dt.$$

Por consiguiente

$$I=\int t^n\frac{1}{2b}\,dt=\frac{1}{2b}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C,$$

de donde

$$I=\frac{1}{2b}\frac{(a+bx^2)^{n+1}}{n+1}+C.$$

6. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Escribamos $\sqrt{x^2+a}+x=t$,
de donde

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=dt;$$

así pues

$$\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=dt,$$

entonces $\quad I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sqrt{x^2+a}+x|+C$.

7. $I=\int\sin^n x\cos x\,dx$.

Escribamos

$$t=\sin x, \; dt=\cos x\,dx,$$

es decir

$$I=\int t^n\,dt,$$

por consiguiente

$$I=\begin{cases}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C & \text{para } n\neq -1,\\ \ln|t|+C=\ln|\sin x|+C & \text{para } n=-1.\end{cases}$$

8. $I=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}$, $n\neq 1$.

Escribamos

$$x^2+1=t, \; 2x\,dx=dt.$$

Por consiguiente

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{t^{n-1}}+C=-\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}+C.$$

Análogamente obtenemos:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

5. Integración por Partes. Sean u y v funciones de la variable x con derivadas en el intervalo (a, b). Tendremos entonces

$$(uv)' = uv' + vu',$$

de donde

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Integrando ambos miembros de la ecuación y considerando que

$$\int (uv)'\,dx = uv,$$

obtenemos

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx, \qquad (1)$$

si existen ambas integrales.

Empleando diferenciales, la fórmula anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (2)$$

La fórmula (2) hace posible la evaluación de la integral $\int u\,dv$ una vez que se haya evaluado $\int v\,du$, que puede ser más sencilla que la primera.

Este método se llama de integración por partes.

Ejemplos.

1. $I = \int xe^x\,dx.$

Escribamos

$$u = x, \qquad du = dx,$$
$$dv = e^x\,dx, \qquad v = \int e^x\,dx = e^x$$

Por consiguiente,

$$I = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

2. $\int \ln x\,dx.$

Escribamos

$$u = \ln x, \qquad du = \frac{dx}{x},$$
$$dv = dx, \qquad v = \int dx = x.$$

Por consiguiente

$$I = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

3. $I = \int x^n \ln x\,dx, \quad n \neq -1.$

Escribamos

$$u = \ln x, \qquad du = \frac{dx}{x},$$

$$dv = x^n\,dx, \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por consiguiente

$$I = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

6. Integrales de Funciones Elementales.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

   $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

2. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$

3. $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$ (ver Par. 5, Ej. 2)

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

   $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

5. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

Escribamos

$$\cos x = t, \quad -\sin x\,dx = dt.$$

Entonces

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

6. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$

Empleando la substitución $\sin x = t.$

7. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Se tiene

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Por consiguiente

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Escribamos

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = dt.$$

Entonces

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

8. $\int \sec x\,dx = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| + C.$

Escribamos

$$x = \frac{\pi}{2} - t, \quad dx = -dt;$$

en este caso

$$\int \sec x\,dx = -\int \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = -\int \operatorname{cosec} t\,dt,$$

esto es

$$\int \sec x\,dx = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| + C.$$

9. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Integremos por partes. Escribamos

$$u = \arcsin x, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$dv = dx, \quad v = x.$$

Entonces

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para evaluar la última integral, escribamos

$$1-x^2=t, \quad -2x\,dx=dt, \quad x\,dx=-\frac{1}{2}\,dt,$$

por lo tanto

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}.$$

10. $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

Procedamos como en el ejemplo anterior o bien hagamos uso de la fórmula $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

Escribamos

$$u=\operatorname{arctg} x, \quad du=\frac{dx}{1+x^2},$$
$$dv=dx, \qquad v=x;$$

de donde

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Para la evaluación de la última integral, escribamos

$$1+x^2=t, \quad 2x\,dx=dt, \quad x\,dx=\frac{1}{2}\,dt,$$

por consiguiente

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

12. $\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

Procedamos como en el ejemplo anterior o usemos la fórmula

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \frac{\pi}{2}.$$

13. $\int \operatorname{arcsec} x\,dx = x\operatorname{arcsec} x - \ln\left(\sqrt{x^2-1}+|x|\right)+C.$

Escribamos

$$u=\operatorname{arcsec} x, \quad du=\frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad dv=dx, \qquad v=x.$$

Entonces

$$\int \operatorname{arcsec} x\,dx = x\operatorname{arcsec} x - \int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Puesto que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|$$

(ver Par. 4, Ej. 6), entonces

$$\int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} -\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right| = \ln\left(\sqrt{x^2-1} \quad x\right) & \text{para } x<-1, \\ \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) & \text{para } x>1; \end{cases}$$

en ambos casos consecuentemente puede escribirse

$$\int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(\sqrt{x^2-1}+|x|\right).$$

14. $\int \operatorname{arccosec} x\,dx = x\operatorname{arccosec} x + \ln\left(\sqrt{x^2-1}+|x|\right)+C.$

Procedamos como en el ejemplo anterior o usemos la fórmula

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2}.$$

7. Fórmulas de Reducción.

I. Encontrar la integral

$$I_n=\int \sin^n x\,dx \text{ (n entero)}$$

Consideremos los casos en que $n\neq -1$ y $n\neq 0$. Puesto que

$$\sin^n x=\sin^{n-2} x\sin^2 x=\sin^{n-2} x-\sin^{n-2} x\cos^2 x,$$

entonces

$$I_n=I_{n-2}-\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx. \tag{1}$$

Escribamos

$$u=\cos x, \qquad du=-\sin x\,dx,$$

$$dv=\sin^{n-2} x\cos x\,dx, \quad v=\int \sin^{n-2} x\cos x\,dx=\frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \text{ *)}.$$

Entonces

$$\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx=\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n-1}+\int \frac{\sin^n x}{n-1}dx=$$

$$=\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n-1}+\frac{1}{n-1}I_n.$$

Substituyendo este resultado en la relación (1), obtenemos

$$I_n=I_{n-2}-\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n-1}-\frac{1}{n-1}I_n,$$

de donde

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}. \tag{1*}$$

Observemos que esta última fórmula es válida para todo $n\neq 0$, por lo que

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \quad (n\neq 0). \tag{2}$$

Es conveniente usar esta fórmula para el caso en que $n>0$.

Ejemplo 1. Tenemos

$$\int \sin^6 x\,dx=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx,$$

$$\int \sin^4 x\,dx=-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}+\frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx,$$

$$\int \sin^2 x\,dx=-\frac{\cos x\sin x}{2}+\frac{1}{2}x,$$

por lo que

$$\int \sin^6 x\,dx=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x-\frac{5}{6\cdot 4}\cos x\sin^3 x-\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\cos x\sin x+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}x+C.$$

Para obtener la fórmula de reducción para $n<0$, escribamos la fórmula (1*) de la siguiente manera

$$I_{n-2}=\frac{n}{n-1}I_n+\frac{\cos x\sin^{n-1} x}{n-1}.$$

Escribiendo

$$n-2=-k,$$

obtenemos

$$I_{-k}=-\frac{\cos x\sin^{-k+1} x}{k-1}+\frac{k-2}{k-1}I_{-k+2},$$

por consiguiente

$$\int \frac{dx}{\sin^k x}=-\frac{\cos x}{(k-1)\sin^{k-1} x}+\frac{k-2}{k-1}\int \frac{dx}{\sin^{k-2} x}. \tag{3}$$

Para k = 1; tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C \quad \text{(Pár. 6, Ej. 7)}.$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

II. Procediendo análogamente, obtenemos

+ Ver Par.4, Ej. 7.

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx, \quad n \neq 0. \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^k x} = \frac{\sin x}{(k-1)\cos^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1}\int \frac{dx}{\cos^{k-2} x} \quad (k \neq 1). \tag{5}$$

III. Encontrar la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

(n, entero positivo). Tenemos $I_1 = \operatorname{arctg} x + C.$
Consideremos ahora que $n > 1$. Substituyendo en el numerador al factor 1 por la diferencia $(x^2+1) - x^2$, obtenemos

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}.$$

Escribamos en la segunda integral $u = x$, $du = dx$,

$$dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}, \quad v = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} \ ^{*)},$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

y en consecuencia

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1},$$

es decir

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Obtuvimos entonces la fórmula de reducción

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \quad (n > 1). \tag{6}$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1},$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x,$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{2\cdot 4}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2\cdot 4}\operatorname{arctg} x + C.$$

Problemas

Encontrar las siguientes integrales:

1. $\int a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}}{m \ln a} + C.$
2. $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C.$
3. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C.$

---

* Párrafo 4, Ej. 8

4. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, \quad (n \neq -1)$

5. $\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n} dx = \frac{\ln|a+bx^n|}{nb} + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b}{a} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} x + C.$

8. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+5} dx = \ln|x^2-x+5| + C.$

9. $\int \frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+x-1} dx = \ln|x^3-3x^2+x-1| + C.$

10. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$

11. $\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C.$

12. $\int x \sin(x^2+1)\, dx = -\frac{\cos(x^2+1)}{2} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1).$

14. $\int \frac{[\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^3 x]}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{5}{4}\operatorname{tg}^4 x + C.$

15. $\int [\sin^5 x - 5\sin^3 x + \sin x] \cos x\, dx = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{5}{4}\sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + C.$

17. $\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right] + C.$

18. $\int \sin ax \sin bx\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} - \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C.$

19. $\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C.$

20. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

21. $\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C.$

22. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C.$

23. $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{1}{2b}\ln|a + b\operatorname{tg}^2 x| + C$

24. $\int e^{ax}\cos x\, dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a\cos x)}{1+a^2} + C.$

25. $\int e^{ax}\sin x\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin x - \cos x)}{1+a^2} + C.$

26. $\int \frac{a + b\sin x + c\cos x}{\sin 2x} dx = \frac{a}{2}\ln|\operatorname{tg} x| +$

$+\frac{b}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{c}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

27. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} x)^3 + C.$

28. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} dx = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} +$

$+(x+1) - \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

Soluciones.

1) $mx=t$; 2) $ax+b=t$; 3), 4) $a+bx=t$; 5) $a+bx^n=t$; 6), 7) $\frac{bx}{a}=t$; 8) $x^2-x+5=t$; 9) $x^3-3x^2+x-1=t$; 10) $f(x)=t$; 11) $ax+b=t$; 12) $x^2+1=t$; 13) $\ln x=t$; 14) $\operatorname{tg} x=t$; 15) $\sin x=t$; 16) multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$; 17), 18), 19) substituir el producto por la suma

$$\sin ax \cos bx=\frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x];$$

20) $\operatorname{tg} x=t$; 21) $\sqrt{1+x}=t$; 22), 23) $\operatorname{tg} x=t$; 24), 25) aplicar en ambas integrales el método de integración por partes y después resolver el sistema de ecuaciones obtenido; 26) substituir seno 2x por 2 sen x cos x; 27) $\operatorname{arctg} x=t$; 28) $x+1=t^2$.

CAPITULO XIII

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

1. Descomposición de un Polinomio en Factores. En Algebra[+] se demuestra que cualquier polinomio Q (x) puede expresarse como el producto

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma), \qquad (1)$$

donde A es el coeficiente de la potencia mayor de x en el polinomio Q (x) y $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ son las raíces de la ecuación Q (x) = 0. Los factores $x-\alpha$, $x-\beta$, ... , $x-\gamma$ se denominan factores elementales. Si algunos de los factores elementales del polinomio Q (x) son iguales entre sí, al agruparlos obtenemos la expresión

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots(x-\gamma)^t, \qquad (2)$$

donde r, s, ... , t son números naturales y r + s + ... + t = n (siendo n el grado del polinomio Q (x)).

Ejemplos.

1. El polinomio $3x^2+3x-6$ tiene las raíces $\alpha=1, \beta=-2$, por lo que

$$3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2).$$

2. El polinomio x^4-1 tiene las raíces $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=i$, $\delta=-i$ $(i=\sqrt{-1})$, por lo que

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i).$$

3. El polinomio $x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$. Si el polinomio elemental $x-\alpha$ aparece en el desarrollo (2) con potencia r, a α se le llama raíz de multiplicidad r.

Las raíces $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ pueden ser complejas. Es de importancia para nosotros el siguiente teorema del Algebra: si el polinomio Q (x) con coeficientes reales tiene una raíz r-múltiple compleja a+bi, tiene también la raíz r-múltiple compleja a-bi, conjugada de la anterior.

Así pues, si Q (x) es un polinomio con coeficientes reales, cada vez que en el desarrollo (2) aparezca el factor $[x-(a+bi)]^r$, apa -

---

+ Las demostraciones de los teoremas de los parágrafos 1 y 2 se encuentran en los cursos generales de Algebra Superior.

recerá también el factor $[x-(a-bi)]^r$.

Multiplicando estos factores, obtenemos

$$[x-(a+bi)]^r[x-(a-bi)]^r=[(x-a)-bi]^r[(x-a)+bi]^r=$$
$$=[(x-a)^2+b^2]^r=(x^2+px+q)^r,$$

donde

$$p=-2a, \quad q=a^2+b^2.$$

El polinomio x^2+px+q tiene las raíces a + bi y a - bi no pudiéndosele representar como el producto de polinomios de primer grado con coeficientes reales. Procediendo de una manera análoga con el resto de las raíces complejas, llegamos finalmente a la representación del polinomio Q (x) en la forma

$$Q(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots(ax^2+bx+c)^t(dx^2+ex+f)^n\ldots \qquad (3)$$

En este desarrollo todos los números $\alpha, \beta, \ldots, a, b, c, d, e, f, \ldots$ son reales, y los polinomios ax^2+bx+c, $dx^2+ex+f, \ldots$ no pueden presentarse en la forma de productos de polinomios de primer grado con coeficientes reales.

Ejemplos.
1. $x^3+1=(x^2-x+1)(x+1)$.
2. $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$.
3. $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.
4. $x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$.
5. Desarrollar en factores los siguientes polinomios: a) x^2-5x+6; b) x^3+3x^2-6x; c) x^6-1; d) x^8-1; e) $x^3(x^2-3x+2)^2(x^3+1)^2$.

2. Desarrollo de una Función Racional en Fracciones Elementales (Simples). Se llama función racional aquella función definida en la forma de un cociente de dos polinomios, en aquellos puntos en los que el denominador no tienda a cero. Esto es, una función racional puede escribirse en la forma de un quebrado $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P (x) y Q (x) son polinomios.

Si el grado del numerador es igual o mayor que el del denominador, entonces, efectuando la división, obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde W (x) es un cierto polinomio y R (x) es un polinomio de grado menor que Q (x).

Ejemplos.

1. $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$.

2. $\dfrac{x^5+x^3-x^2+x+3}{x^3+2x-1}=x^2-1+\dfrac{3x+2}{x^3+2x-1}$.

Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$, una función racional, donde P (x) y Q (x) son polinomios con coeficientes reales. Admitamos, que el polinomio Q (x) puede escribirse en la forma (3) (ver Pg.217).

Teorema. Si el grado del numerador de la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es menor que el de su denominador, puede entonces escribirse esta función en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^r}+\frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}}+\ldots+\frac{C}{x-\alpha}+$$
$$+\frac{D}{(x-\beta)^s}+\frac{E}{(x-\beta)^{s-1}}+\ldots+\frac{F}{x-\beta}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^t}+\frac{Ix+K}{(ax^2+bx+c)^{t-1}}+\ldots+\frac{Lx+M}{ax^2+bx+c}+$$
$$+\frac{Nx+P}{(dx^2+ex+f)^n}+\frac{Qx+R}{(dx^2+ex+f)^{n-1}}+\ldots+\frac{Sx+T}{dx^2+ex+f}. \qquad (1)$$

En este desarrollo, A, B, C, ... son constantes. El desarrollo (1) se llama **desarrollo de una función racional en fracciones elementales.**

La igualdad (1) se verifica para todo x real, excepto para los valores $x=\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, es decir, para las raíces reales de la ecuación Q (x) = 0.

Cada factor del polinomio Q (x) aparece como denominador en el desarrollo (1), en todos los grados enteros, principiando con el grado que el factor tiene en el desarrollo (3) (parágrafo 1) y finalizando con el grado primero.

Los numeradores de las fracciones del desarrollo (1) son constantes o bien polinomios de primer grado, dependiendo de que sea el denominador correspondiente de primer o de segundo grado.

Para determinar los números A, B, C, ... multiplicamos ambos miembros de la relación (1) por Q (x). Quitando así los denominadores, disponemos en el segundo miembro de un polinomio en potencias de x. Dado que la igualdad entre el polinomio P (x) y el polinomio del segundo miembro es válida para todos los valores de x +, los coeficientes de las mismas potencias de la variable x serán iguales entre sí. Obtenemos de esta manera una serie de ecuaciones de primer grado, de las que determinamos las incognitas A, B, C, ...

Observación. Antes de desarrollar la función racional dada en fracciones elementales, es necesario verificar que:

+ La igualdad es válida para todo x, diferente de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, según la condición. Para $x=\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ es válida en virtud de la continuidad.

1°. El grado del numerador es menor que el del denominador,
2°. El numerador y el denominador sean primos entre sí.

Ejemplos. Desarrollar las siguientes funciones racionales en **fracciones** elementales.

3. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$.

Dado que $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, haciendo

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2},$$

de donde, multiplicando ambos miembros por x^2-5x+6 obtenemos

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3),$$

por lo que

$$2x-1=x(A+B)-2A-3B,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} A+B&=2,\\ 2A+3B&=1, \end{aligned}$$

de donde A = 5, B = -3.
Así pues

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$

4. $\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}$.

Apliquemos aquí otro método que conduce más rápidamente al objetivo, en el caso en que el denominador tenga solo raíces reales simples (no repetidas).
Hagamos

$$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x},$$

de donde

$$3x^2+3x+12=A(x+2)x+B(x-1)x+C(x-1)(x+2).$$

Haciendo sucesivamente x = 0, 1, -2, obtenemos:

$$12=-2C,\quad 18=3A,\quad 18=6B;$$

así pues,

$$A=6,\quad B=3,\quad C=-6,$$

por consiguiente

$$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\frac{6}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{6}{x}.$$

5. $\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$,

donde P (x) es un polinomio de grado menor que 3 y α, β, γ son diferentes entre sí.

Hagamos

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma},$$

de donde

$$P(x)=A(x-\beta)(x-\gamma)+B(x-\alpha)(x-\gamma)+C(x-\alpha)(x-\beta).$$

Haciendo sucesivamente $x=\alpha, \beta, \gamma$, obtenemos:

$$A=\frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)};\quad B=\frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)};\quad C=\frac{P(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

6. $\dfrac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$,

por lo tanto

$$3x^2+x+2=A(x-1)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-1), \tag{2}$$

de donde

$$3x^2+x+2=x^2(A+C)+x(-2A+B)+A+B-C,$$

así pues

$$A+C=3,\quad -2A+B=1,\quad A+B-C=2;$$

obtenemos finalmente

$$A=1,\quad B=3,\quad C=2.$$

Los coeficientes A, B, C pueden obtenerse por otro método. Haciendo en (1) sucesivamente x = -1. +1, obtenemos:

$$4=4A,\quad 6=2B,$$

por consiguiente

$$A=1,\quad B=3.$$

Para determinar el coeficiente C, derivamos ambos miembros de (2):

$$6x+1=2A(x-1)+B+C\cdot 2x.$$

Haciendo ahora x = 1, obtenemos:

$$7 = B + 2C;$$

por consiguiente, C = 2.

Es conveniente emplear este método en aquel caso en que el denominador de la función racional tiene raíces reales múltiples.

7. $\frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}$,

por consiguiente

$$x^4 + 1 = A(x-1)(x+1)^2 + Bx(x-1)(x+1)^2 + \\ + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x-1) + Ex^2(x-1)(x+1).$$

Haciendo sucesivamente x = 0, 1, -1, obtenemos:

$$1 = -A, \quad 2 = 4C, \quad 2 = -2D,$$

de donde

$$A = -1, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = -1.$$

Así pues, tenemos:

$$x^4 + 1 = -(x-1)(x+1)^2 + Bx(x-1)(x+1)^2 + \\ + \frac{1}{2}x^2(x+1)^2 - x^2(x-1) + Ex^2(x-1)(x+1).$$

Derivando ambos miembros, obtenemos:

$$4x^3 = -(x+1)^2 - 2(x-1)(x+1) + B[(x-1)(x+1)^2 + \\ + x(x+1)^2 + 2x(x-1)(x+1)] + x(x+1)^2 + x^2(x+1) - \\ - 2x(x-1) - x^2 + E[2x(x-1)(x+1) + x^2(x+1) + x^2(x-1)].$$

Haciendo ahora sucesivamente x = 0, -1, hallamos:

$$0 = 1 - B, \quad -4 = -5 - 2E,$$

por consiguiente

$$B = 1, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

8. $\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$,

de donde

$$x^2 + 2x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Haciendo x = 1, obtenemos 2 = 2A, es decir, A = 1. Efectuando las operaciones e igualando coeficientes, hallamos:

$$1 = A + B, \quad 2 = -B + C, \quad -1 = A - C,$$

por consiguiente

$$B = 0; \quad C = 2.$$

9. $\dfrac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}.$

Quitando denominadores e igualando coeficientes, obtenemos:

$$A + D = 0, \quad E + D = 0, \quad 2A + B + E + D = 3,$$
$$B + C + E + D = 0, \quad A + C + E = 1,$$

por consiguiente

$$A = 1, \; B = 1, \; C = -1, \; D = -1, \; E = 1.$$

10. Desarrollar en fracciones elementales las funciones racionales que aparecen como integrandos en los problemas del final de este capítulo.

3. Integrales de Funciones Racionales. Desarrollando una función racional en fracciones elementales, llevamos la integral de la función racional a integrales del tipo

a) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha| + C;$

b) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)(x-a)^{r-1}} + C \quad (r \neq 1);$

c) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}\,dx$

(siempre que el polinomio ax^2+bx+c no tenga raíces reales, así que $b^2-4ac<0$).

Para calcular la integral del tipo c), observemos que

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

por consiguiente

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{1}$$

Introduzcamos una nueva variable z, de acuerdo con la fórmula

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a}z^2, \tag{2}$$

de donde encontramos

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} z. \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta (1) y (2), tenemos:

$$ax^2 + bx + c = \frac{4ac-b^2}{4a}(z^2+1).$$

Así pues, empleando la substitución (3), obtenemos:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r} dx = \int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r} dz;$$

donde M y N denotan constantes cualesquiera.

Además,

$$\int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r} dz = M \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^r} + N \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}.$$

Aplicamos a la segunda integral la fórmula de reducción (Pg.213, fórmula (6)); haciendo en la primera integral $z^2+1=t$ (Pg.208, Ej. 8), obtenemos:

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^r} = -\frac{1}{2(r-1)} \frac{1}{(z^2+1)^{r-1}} + C \quad (r \neq 1);$$

$$\int \frac{z dz}{z^2+1} = \frac{1}{2} \ln (z^2+1) + C.$$

Ejemplo.

$$\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2} dx,$$

$$2x^2-4x+10 = 2(x^2-2x+5) = 2[(x-1)^2+4] = 2(x-1)^2+8.$$

Haciendo $2(x-1)^2 = 8z^2$, de donde $x = 1+2z$, así que

$$2x^2-4x+10 = 8(z^2+1), \quad dx = 2dz,$$

por consiguiente

$$\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2} dx = \int \frac{10z+8}{8^2(z^2+1)^2} 2dz = \frac{5}{16} \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Pero

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z^2+1},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z$$

(ver Pg.213, fórmula (6)). Así pues,

$$\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2}dx = -\frac{5}{32}\frac{1}{z^2+1} + $$
$$+\frac{1}{8}\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg} z + C = \frac{-5+4z}{32(z^2+1)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg} z + C.$$

Substituyendo ahora $z=\frac{x-1}{2}$, hallamos

$$\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2}dx = \frac{2x-7}{4(2x^2-4x+10)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$

Problemas

Calcular las siguientes integrales

1. $\int \frac{5x^3+1}{(x+1)(2x+1)}dx = \frac{5}{4}x^2-\frac{15}{4}x+4\ln|x+1|+\frac{3}{8}\ln|2x+1|+C.$
2. $\int \frac{x^4dx}{(x-1)^2(x+1)^2} = x-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$
3. $\int \frac{x+1}{(x-1)^3}dx = -\frac{x}{(x-1)^2}+C.$
4. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)^2} = -\frac{3}{x+3}+\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2+C.$
5. $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$
6. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x+C.$
7. $\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx =$
$$=\frac{4}{7}\ln|x-2|+\frac{17}{14}\ln(x^2+3)-\frac{\sqrt{3}}{21}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$
8. $\int \frac{x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx = \frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$
9. $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$
10. $\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$
11. $\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$
12. $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$
13. $\int \frac{dx}{x^6-1} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+C.$
14. $\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3}dx = \frac{4x^2+3}{4(x^2+1)^2}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$
15. $\int \frac{x^2}{1-x^6}dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3-1}\right|+C.$
16. $\int \frac{x^2dx}{x^6-10x^3+9} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3-9}{x^3-1}\right|+C.$
17. $\int \frac{6x^5}{(5-7x^3)^3}dx = \frac{x^6}{5(5-7x^3)^2}+C.$
18. $\int \frac{12x^{15}}{(x^4+1)^2}dx = \frac{3x^4(x^8-3x^4+4)+30}{2(x^4+1)}+\ln(x^4+1)^9+C.$

19. $\int \frac{dx}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^n}$, $\alpha \neq \beta$; haciendo $\frac{x-\alpha}{x-\beta}=z$, obtenemos:

$$x=\beta+\frac{\alpha-\beta}{1-z}, \quad dx=\frac{\alpha-\beta}{(1-z)^2}\,dz,$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)=(\alpha-\beta)^2\frac{z}{(1-z)^2},$$

por consiguiente

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^n}=\frac{1}{(\alpha-\beta)^{2n-1}}\int \frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}\,dz.$$

Determinar por este método las integrales

a) $\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^3}$; b) $\frac{dx}{(x^2-1)^5}$; c) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^3}$.

Sugestiones.

En 1), 2) dividimos la parte entera, desarrollando la **función** racional restante en fracciones elementales. En 3), 4), 5), ... , 13) desarrollar en fracciones elementales; 14) $x^2=t$; 15), 16), 17) $x^3=t$, 18) $x^4=t$.

CAPITULO XIV

INTEGRACION DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

1. Integración de Funciones Irracionales Simples. Si la variable x aparece dentro del signo de integración en diferentes potencias fracionarias, entonces, si con p se designa al mínimo común denominador de los exponentes de las potencias de x, se podrá, mediante la substitución $x=z^p$ eliminar las potencias fraccionarias.

Ejemplo 1. $I=\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{(1+x^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{2}}}$;

haciendo $x=z^6$, $dx=6z^5\,dz$, obtenemos:

$$I=\int\frac{6z^5\,dz}{(1+z^2)z^3}=6\int\frac{z^2dz}{1+z^2}=6z-6\operatorname{arctg} z+C,$$

por consiguiente

$$I=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Ejemplo 2. $I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$; haciendo $x=z^4$, $dx=4z^3\,dz$

obtenemos

$$I=\int\frac{z^2}{1+z}\,4z^3\,dz=4\int\frac{z^5dz}{1+z}=$$

$$=4\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}+z\right)-4\ln|z+1|+C,$$

por consiguiente

$$I=\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$$

Observación 1. Se procede en una forma análoga si dentro del signo de integración aparecen potencias fraccionarias del binomio ax + b. La substitución $ax+b=z^p$ (p, lo mismo que en el cas rior) permite eliminar las potencias fraccionarias.

Ejemplo 3. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; $x+1=z^2$, $dx=2z\,dz$,

por consiguiente

$$I=\int\frac{2z\,dz}{(z^2-1)z}=2\int\frac{dz}{z^2-1}=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C,$$

así que

$$I=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$$

Observación 2. Si bajo el signo de integración aparecen potencias fraccionarias diferentes de la expresión $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, es entonces posible eliminarlas mediante la substitución $\frac{ax+b}{a'x+b'}=z^p$ (p, igual que en los casos anteriores).

Ejemplo 4. $I=\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx,\quad \frac{1+x}{x}=z^2,\quad x=\frac{1}{z^2-1},$

$$dx=-\frac{2z\,dz}{(z^2-1)^2},$$

por consiguiente

$$I=\int (z^2-1)\cdot z\frac{-2z\,dz}{(z^2-1)^2}=-2\int\frac{z^2}{z^2-1}\,dz=$$
$$=-2z-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C,$$

es decir

$$I=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C.$$

2. Integrales Binomias. Las integrales del tipo

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx,$$

donde m, n y p son números racionales, se llaman integrales binomias.

Si p es un número entero, la integral se encuentra directamente según el método descrito en el párrafo 1.

Sea ahora p un número no entero. Introduzcamos la substitución

$$x=z^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}\,dz.$$

Si $z>0$, entonces

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(az+b)^p\,dz=$$
$$=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{az+b}{z}\right)^p dz.$$

Así pues, vemos que si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero, la integral binomia se transforma en una integral de función racional mediante la substitución

$$az+b=t^\alpha$$

(α es el denominador del número p)

Si $\frac{m+1}{n}+p$ es un número entero, obtendremos una función racional por medio de la substitución

$\frac{az+b}{z}=t^\alpha$ (α, igual que en la precedente)

De esta manera, la integral binomia puede transformarse en integral de una función racional si uno de los números

$$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$$

es entero.

Ejemplo.

$$I=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Aquí, tenemos $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$. Por lo tanto $\frac{m+1}{n}=2$, por lo que puede transformarse la integral dada en una función racional.

Hagamos

$$x^2=z,$$

$$x\,dx=\frac{1}{2}\,dz,$$

por consiguiente

$$I=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{3}{2}}dz.$$

Escribamos ahora

$$1-z=t^2 \quad (t>0),$$

$$dz=-2t\,dt,$$

entonces

$$I=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=\frac{1}{t}+t+C=\frac{1}{\sqrt{1-z}}+\sqrt{1-z}+C,$$

por consiguiente

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C=\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

3. Integración de Funciones Racionales R(x, y)[+]. La integración de la función racional R(x,y), cuando ($y=\sqrt{ax^2+bx+c}$) conduce a la integración de una función racional en t, mediante una de las tres siguientes substituciones:

1) $a>0$.

Hagamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=t, \tag{1}$$

de donde

$$ax^2+bx+c=ax^2+2x\sqrt{a}t+t^2,$$

+ Se llama función racional R(x, y) de dos variables, a una función definida como el cociente de dos polinomios en (x, y) para aquellos puntos en los que el denominador sea distinto de cero. Supondremos siempre que los coeficientes de los polinomios son reales y que los polinomios son primos entre sí.

por consiguiente

$$bx + c = 2x\sqrt{a}t + t^2.$$

Escribiendo

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t},$$

obtenemos

$$dx = 2\frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - \sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t = \frac{-\sqrt{a}t^2 + bt - \sqrt{a}c}{b - 2\sqrt{a}t}.$$

De este modo, por medio de la substitución (1), expresamos en forma racional

$$x, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad dx$$

mediante la variable t. Por consiguiente, la integral

conduce a una integral de una función racional de la variable t.

Ejemplo 1.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}.$$

Dado que

$$a = 1 > 0,$$

obtenemos entonces

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x = t,$$

de donde

$$x = \frac{t^2 - 5}{6 - 2t}, \quad dx = 2\frac{-t^2 + 6t - 5}{(6 - 2t)^2}dt, \quad \sqrt{x^2 + 6x + 5} = \frac{-t^2 + 6t - 5}{6 - 2t},$$

por consiguiente

$$I = \int \frac{2dt}{6 - 2t} = -\ln|3 - t| + C,$$

es decir

$$I = -\ln|3 + x - \sqrt{x^2 + 6x + 5}| + C.$$

2) $c \geqslant 0$.
Hagamos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}, \tag{2}$$

de donde

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c, \quad ax + b = xt^2 + 2t\sqrt{c}.$$

Por consiguiente, al hacer

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2},$$

obtenemos

$$dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

Así pues, también en este caso, después de hacer la substitución (2), la integral $\int R(x,y)\,dx$ se transforma en una integral de función racional de la variable t.

Ejemplo 2.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}};\quad \text{tenemos}\quad c=4>0.$$

Hagamos

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=xt+2,$$

de donde

$$x=-\frac{4t+3}{1+t^2},\quad dx=2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=-\frac{2t^2+3t-2}{t^2+1},$$

por consiguiente

$$I=-\int\frac{2dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+C,$$

así que

$$I=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}-2}{x}+C.$$

3) $b^2-4ac>0$.

Designando como α y β las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, obtenemos

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Escribamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha), \tag{3}$$

de donde

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=t^2(x-\alpha)^2,\qquad a(x-\beta)=t^2(x-\alpha);$$

haciendo

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2},$$

obtenemos

$$dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(a-t^2)^2}dt,\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\beta-\alpha)t}{a-t^2}.$$

Por lo tanto, mediante la substitución (3), la integral $\int R(x,y)\,dx$ se transforma en una integral de función racional de la variable t.

Ejemplo 3.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}.$$

Tenemos

$$b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot3=4>0;$$

puesto que

$$-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3),$$

entonces escribimos

$$\sqrt{-(x-1)(x-3)}=(x-1)t.$$

De donde

$$x=\frac{t^2+3}{t^2+1},\quad dx=-\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{-x^2+4x-3}=\frac{2t}{t^2+1},$$

por consiguiente

$$I=-\int\frac{2\,dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+C=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{1-x}}+C.$$

Obsrvación. Si $a<0$ y $c<0$, las dos primeras substituciones no serán convenientes. En este caso es posible siempre emplear la tercera. En efecto, si $a<0$, $c<0$ y $b^2-4ac<0$, el polinomio ax^2+bx+c será siempre negativo, y la expresión $\sqrt{ax^2+bx+c}$ no será real sea cual fuere el valor de x.

4. Algunos Casos Particulares de Integrales de Funciones Racionales R(x,y) con ($y=\sqrt{ax^2+bx+c}$).

1) Una integral del tipo

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad a<0,\ b^2-4ac>0,$$

puede calcularse también por el siguiente método.

Tenemos

$$ax^2+bx+c=-\left(x\sqrt{|a|}-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2+\frac{b^2-4ac}{4|a|}.$$

Haciendo

$$\left(x\sqrt{|a|}-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4|a|}z^2,$$

esto es

$$x=\frac{b}{2|a|}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}z,$$

entonces

$$dx=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}dz,\quad ax^2+bx+c=\frac{b^2-4ac}{4|a|}(1-z^2).$$

Por consiguiente

$$I=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin z+C,$$

así que

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

Ejemplo 1.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5x-6x^2-1}},$$

$$5x-6x^2-1=-\left(x\sqrt{6}-\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2+\frac{1}{24}.$$

Hagamos

$$\left(x\sqrt{6}-\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2=\frac{1}{24}z^2,$$

de donde

$$x=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}z,\quad dx=\frac{1}{12}dz,$$

$$5x-6x^2-1=\frac{1}{24}(1-z^2),$$

por consiguiente

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-6x^2-1}}=\int\frac{\frac{1}{12}dz}{\frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arcsin z+C,$$

así que

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-6x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arcsin(12x-5)+C=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\arcsin(-12x+5)+C.$$

2)

$$I=\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Escribamos

$$x-\alpha=\frac{1}{z}.$$

entonces

$$x=\alpha+\frac{1}{z}.$$

Si $x>\alpha$, entonces $z>0$. Por consiguiente, para $x>\alpha$ obtenemos

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{\frac{Lz^2+Mz+N}{z^2}}=\frac{1}{z}\sqrt{Lz^2+Mz+N}$$
$$(L=a\alpha^2+b\alpha+c,\ M=2a\alpha+b,\ N=a).$$

Puesto que

$$dx=-\frac{dz}{z^2},$$

entonces

$$I=-\int\frac{dz}{\sqrt{Lz^2+Mz+N}}\quad(x>\alpha).$$

Procediendo análogamente, obtenemos

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{Lz^2+Mz+N}}\quad(x<\alpha).$$

Ejemplo 2.

$$I=\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Hagamos

$$x-1=\frac{1}{z},$$

de donde

$$x=1+\frac{1}{z},\quad dx=-\frac{dz}{z^2},\quad \sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{2z^2+2z+1}{z^2}},$$

ya que para $x>1$, $z>0$, entonces $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{z}\sqrt{2z^2+2z+1}$, de donde

$$I=-\int \frac{dz}{\sqrt{2z^2+2z+1}}.$$

Aplicando en la última integral la substitución (ver Pg. 229)

$$\sqrt{2z^2+2z+1}=\sqrt{2}z+t,$$

obtenemos

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(4z+2-2\sqrt{2}\sqrt{2z^2+2z+1})+C.$$

Haciendo, finalmente $z=\frac{1}{x-1}$, obtenemos para $x>1$:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2x+2-2\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right|+C.$$

Puede fácilmente demostrarse que la fórmula obtenida es también válida para $x<1$.

3) $$I=\int \frac{Ax\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}.$$

Calculemos esta integral por medio de la substitución

$$\sqrt{ax^2+c}=t.$$

Tenemos

$$ax^2+c=t^2,\quad x^2=\frac{t^2-c}{a},\quad x\,dx=\frac{1}{a}t\,dt.$$

Por consiguiente

$$I=\int \frac{A\,dt}{\alpha t^2+(a\gamma-\alpha c)}.$$

Es fácil calcular la última integral (Ver Cap. XIII).

Ejemplo 3.

$$I=\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}.$$

Hagamos

$$\sqrt{x^2+4}=t,$$

de donde

$$I=\int \frac{dt}{2t^2-7}=\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{7}{2}}}{t+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+C,$$

por consiguiente

$$I=\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}+C.$$

4) $$I=\int\frac{A\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}.$$

Escribamos

$$\sqrt{ax^2+c}=xt,$$

de donde

$$x^2=\frac{c}{t^2-a},$$

por consiguiente

$$x\,dx=-\frac{ct\,dt}{(t^2-a)^2},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}}=\frac{dx}{xt}=\frac{x\,dx}{x^2t}=-\frac{dt}{t^2-a}$$

y por lo tanto

$$I=-\int\frac{A\,dt}{\gamma t^2+(\alpha c-\gamma a)}.$$

Ejemplo 4. $$I=\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}.$$

Haciendo

$$\sqrt{x^2+4}=xt,$$

obtenemos, como anteriormente

$$x^2=\frac{4}{t^2-1},\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{dt}{1-t^2},$$

por consiguiente

$$I=-\int\frac{dt}{t^2+7}=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}+C.$$

Puesto que

$$t=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$

entonces

$$I=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{7}}+C.$$

Observación. Una integral del tipo

$$\int\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}\,dx$$

se calcula tomándola como la suma de dos integrales de los tipos 3) y 4).

5) $$I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}},\ (\beta^2-4\alpha\gamma<0\ ^*),\ a\neq 0).$$

* Si $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, entonces $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ tiene raíces reales y la integral se calcula fácilmente.

Trataremos de llevar esta integral a una del tipo

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}. \tag{1}$$

a) Si $\alpha : a = \beta : b$, entonces, por la substitución

$$x = -\frac{b}{2a} + z$$

transformamos nuestra integral en una del tipo (1).

Si α, β no son proporcionales a los números a, b, esto es, si

$$\alpha b - a\beta \neq 0,$$

entonces, escribimos

$$x = \frac{pz+q}{z+1} \tag{2}$$

y tomamos los números p y q de tal suerte que nuestra integral se transforme en una del tipo (1).

Empleando la substitución (2), obtenemos:

$$I = \pm \int \frac{(Lz+M)\,dz}{(\alpha_1 z^2+\beta_1 z+\gamma_1)\sqrt{a_1 z^2+b_1 z+c_1}}$$

(el signo depende de que $z > -1$ ó $z < -1$), donde

$$\begin{aligned} L &= (Ap+B)(p-q), & M &= (Aq+B)(p-q), \\ \alpha_1 &= \alpha p^2+\beta p+\gamma, & a_1 &= ap^2+bp+c, \\ \beta_1 &= 2\alpha pq+\beta(p+q)+2\gamma, & b_1 &= 2apq+b(p+q)+2c, \\ \gamma_1 &= \alpha q^2+\beta q+\gamma, & c_1 &= aq^2+bq+c. \end{aligned}$$

Determinemos los números p y q de tal suerte que $\beta_1 = 0$ y $b_1 = 0$.

Para ello, habrá que resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha pq+\beta(p+q)+2\gamma &= 0, \\ 2apq+b(p+q)+2c &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Puede demostrarse que el sistema (3) tiene solución real si

$$ab - a\beta \neq 0 \text{ y } \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0.$$

Ejemplos

5a $I = \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2x+6)\sqrt{2x^2+4x-1}}.$

Dado que los coeficientes de los polinomios son proporcionales, hacemos entonces la substitución

$$x = -\frac{4}{2\cdot 2} + z = z - 1.$$

De acuerdo con una substitución tal, obtenemos

$$I = \int \frac{(2z-1)\,dz}{(z^2+5)\sqrt{2z^2-3}}.$$

5b $I = \int \frac{(2x-5)\,dx}{(3x^2-10x+9)\sqrt{5x^2-12x+8}}.$

Usemos la substitución

$$x = \frac{pz+q}{z+1}.$$

Determinamos los números p y q del sistema (3):

$$6pq - 10(p+q) + 18 = 0,$$
$$10pq - 12(p+q) + 16 = 0,$$

de donde $pq = 2$, $p+q = 3$ y por lo tanto $p = 1$, $q = 2$.

Consecuentemente, al substituir

$$x = \frac{z+2}{z+1} = 1 + \frac{1}{z+1},$$

obtenemos para $z > -1$, esto es $x > 1$:

$$I = \int \frac{(3z+1)\,dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}} =$$
$$= 3\int \frac{z\,dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}} + \int \frac{dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}.$$

Estas últimas integrales las calculamos en los ejemplos referentes a los tipos 3) y 4), (Pág.**234**).

Por lo tanto

$$I = \frac{3}{2\sqrt{14}} \ln \frac{\sqrt{z^2+4} - \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2+4} + \sqrt{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{z^2+4}}{z\sqrt{7}} + C;$$

ya que

$$z = -\frac{x-2}{x-1} \text{ y } \sqrt{z^2+4} = \frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{x-1},$$

entonces

$$I = \frac{3}{2\sqrt{14}} \ln \frac{\sqrt{5x^2-12x+8} - (x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2-12x+8} + (x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{(x-2)\sqrt{7}} + C. \quad (4)$$

La fórmula (4) es válida para $x > 1$.

Considerando ahora que en la substitución

$$x = \frac{z+2}{z+1}$$

$z < -1$, y por consiguiente $x < 1$, obtenemos:

$$I = -\frac{3}{2\sqrt{14}} \ln \frac{\sqrt{z^2+4} - \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2+4} + \sqrt{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{z^2+4}}{z\sqrt{7}} + C.$$

Puesto que

$$z = -\frac{x-2}{x-1}, \quad \sqrt{z^2+4} = -\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{x-1},$$

entonces

$$I=\frac{3}{2\sqrt{14}}\ln\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}-(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2-12x+8}+(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{(x-2)\sqrt{7}}+C.$$

Vemos entonces que la fórmula (4) es válida para todos los valores de la variable x. Para $x=1$ es válida en virtud de la continuidad de la derivada y de la función integrando.

5. Observaciones acerca de la Transformación de la Integral $\int R(x, y)\,dx$.

Aunque las substituciones indicadas en el párrafo 3 transforman siempre a la integral $\int R(x,y)\,dx$ en la integral de una función racional, es sin embargo frecuente para evitar cálculos engorrosos, transformar previamente en una forma adecuada a la función R(x, y).

Notemos que si n es un número natural y que $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, entonces

$$y^{2n}=(ax^2+bx+c)^n,\ y^{2n+1}=y^{2n}.\ y=(ax^2+bx+c)^n y.$$

De aquí vemos que cada uno de los polinomios H(x, y) en las variables x, y puede presentarse en la forma

$$H(x,y)=W_1(x)+yW_2(x),$$

donde $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son polinomios en x. Por lo que a la función racional R(x, y), cociente de dos polinomios, es posible llevarla a la forma

$$R(x,y)=\frac{W_1(x)+yW_2(x)}{W_3(x)+yW_4(x)},$$

donde W_1, W_2, W_3, W_4 son polinomios cualesquiera.

Multiplicando numerador y denominador por $W_3(x)-yW_4(x)$ y observando que

$$[W_3(x)-yW_4(x)][W_3(x)+yW_4(x)]=W_3^2(x)-y^2W_4^2(x)\doteq P_1(x)$$

(donde $P_1(x)$ es un polinomio), obtenemos

$$R(x,y)=\frac{P_2(x)+yP_3(x)}{P_1(x)}=\frac{P_2(x)}{P_1(x)}+\frac{P_3(x)}{P_1(x)}\cdot y=\frac{P_2(x)}{P_1(x)}+\frac{P_3(x)y^2}{P_1(x)y}.$$

Haciendo además

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)}=T(x),\quad \frac{P_3(x)y^2}{P_1(x)}=S(x),$$

obtenemos

$$R(x, y) = T(x) + \frac{S(x)}{y}. \tag{1}$$

De aquí vemos que a una función racional R(x, y) $(y = \sqrt{ax^2 + bx + c})$ es siempre posible llevarla a la forma (1), donde T(x) y S(x) son funciones racionales.

Ejemplos

1. $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1},$

por lo tanto

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2x^2 - 1 + \frac{2x^3 - 2x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. $\frac{P(x) + Q(x)y}{P(x) - Q(x)y} = \frac{P^2 + Q^2y^2 + 2PQy}{P^2 - Q^2y^2} = \frac{P^2 + Q^2y^2}{P^2 - Q^2y^2} + \frac{2PQy^2}{(P^2 - Q^2y^2)y}.$

Volvamos a la integral $\int R(x, y)\,dx$. En virtud de (1), tenemos

$$\int R(x, y)\,dx = \int T(x)\,dx + \int \frac{S(x)}{y}\,dx.$$

La primera integral en el miembro derecho es una integral de función racional; en el capítulo XIII se estudiaron integrales de este tipo.

Para el cálculo de la integral $\int \frac{S(x)}{y}\,dx$ llevamos a la función racional S(x) a la forma

$$S(x) = W(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde W(x), P(x) y Q(x) son polinomios, siendo el grado del polinomio P(x) menor que el de Q(x). Desarrollando, finalmente, la función $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones elementales, reducimos el cálculo de la integral $\int \frac{S(x)}{y}\,dx$ al cálculo de integrales del tipo

$$\int \frac{W(x)}{y}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(x - a)^r y}, \qquad \int \frac{(Ax + B)\,dx}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^r y}. \tag{2}$$

Mostramos ahora algunos métodos simples para el cálculo de las integrales (2).

a) Integrales del tipo

$$\int \frac{W(x)\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

(siendo W(x) un polinomio)

Si W(x) es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, puede entonces demostrarse que la integral de un tipo tal es siempre posible llevarla a la forma

$$\int \frac{W(x)\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$
$$= (Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + C)\sqrt{ax^2 + bx + c} + D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

donde A, B, ... , C, D son ciertas constantes *.

Para determinar estas constantes diferenciemos ambos miembros de la igualdad y multipliquémoslos en seguida por $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Igualando los coeficientes de potencias iguales de la variable x en ambos miembros de la ecuación obtenida, estableceremos un sistema de ecuaciones del que podrán determinarse las constantes A, B, ... , C, D.

Así pues, el cálculo de la integral $\int \frac{W(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ se reduce al cálculo de la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Esta última podremos calcularla con ayuda de alguna de las substituciones indicadas en el párrafo 3 (Pg. 228)

Ejemplo 3. $\int \sqrt{5x^2-6x-1}\,dx = \int \frac{5x^2-6x-1}{\sqrt{5x^2-6x-1}}\,dx.$

Hagamos

$$\int \frac{5x^2-6x-1}{\sqrt{5x^2-6x-1}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{5x^2-6x-1} + C\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-6x-1}};$$

derivando ambos miembros de la igualdad, encontramos:

$$\frac{5x^2-6x-1}{\sqrt{5x^2-6x-1}} = A\sqrt{5x^2-6x-1} + \\ + \frac{1}{2}\frac{(Ax+B)(10x-6)}{\sqrt{5x^2-6x-1}} + \frac{C}{\sqrt{5x^2-6x-1}};$$

multiplicando ambos miembros por el radical y ordenando, obtenemos:

$$5x^2-6x-1 = 10Ax^2 + (5B-9A)x + (C-A-3B);$$

por consiguiente

$$10A=5, \quad 5B-9A=-6, \quad C-A-3B=-1$$

de donde

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{3}{10}, \quad C=-\frac{7}{5}.$$

Así pues,

$$\int \sqrt{5x^2-6x-1}\,dx = \\ = \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}\right)\sqrt{5x^2-6x-1} - \frac{7}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-6x-1}}.$$

Respecto a la última integral, escribiendo

$$\sqrt{5x^2-6x-1} = x\sqrt{5}+t,$$

obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-6x-1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-6-2\sqrt{5}\sqrt{5x^2-6x-1}|+C.$$

b) Integral del tipo

$$\int \frac{W(x)\,dx}{(x-\alpha)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

* La existencia de tal desarrollo la admitimos sin demostración.

(W(x), polinomio de grado menor que r)

Si $r=1$, el polinomio W(x) es una constante, y por lo tanto, obtenemos una integral como la considerada en la Pg. 232.

Si $r>1$, puede demostrarse (omitimos la demostración) que una integral de este tipo puede llevarse a la forma

$$\int \frac{W(x)\,dx}{(x-a)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$
$$= \frac{Ax^{r-2}+Bx^{r-1}+\ldots+C}{(x-a)^{r-1}}\sqrt{ax^2+bx+c}+$$
$$+D\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde A, B, ... , C, D, son ciertas constantes, que se determinarán - como se hizo en el caso a) en la Pg. 239.

Calculamos la última integral como lo hicimos en la Pg. 232.

Ejemplo 4.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$
$$= \frac{Ax+B}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+1}+C\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Derivando ambos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+1}} =$$
$$= -\frac{Ax+A+2B}{(x-1)^3}\sqrt{x^2+1}+\frac{Ax+B}{(x-1)^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{C}{(x-1)\sqrt{x^2+1}};$$

multiplicando ambos miembros de la igualdad obtenida por $(x-1)^3\sqrt{x^2+1}$ y agrupando términos semejantes, encontramos

$$x^2+1 = -x^2(2A+B-C)-x(A+B+2C)-(A+2B-C).$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} 2A+B-C&=-1,\\ A+B+2C&=0,\\ A+2B-C&=-1, \end{aligned}$$

de donde

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=\frac{1}{4}.$$

Así pues

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{x+1}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

La última integral fue ya calculada en la Pg. 233.

c) Una integral del tipo

$$\int \frac{W(x)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

W(x), polinomio de grado menor que 2r; el polinomio $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ es -

un polinomio con raíces complejas, esto es, $\beta^2-4\alpha\gamma<0$).

Si $r=1$, el polinomio W(x) será de primer grado y la integral dada coincidirá con la estudiada en la Pg. 235.

En el caso en que $r>1$, es posible demostrar que la integral del tipo considerado puede llevarse a la forma

$$\int\frac{W(x)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$
$$=\frac{Ax^{2r-3}+Bx^{2r-4}+\ldots+C}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+$$
$$+\int\frac{Dx+E}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

donde A, B, ... , C, D, E, son las correspondientes constantes, que se determinarán como en el caso a), Pg. 239.

La integral

$$\int\frac{Dx+E}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se calcula como se hizo en la Pg. 235.

Problemas

1. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx=\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C.$

2. $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx=$

$$=12\left[\frac{1}{9}x^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{12}}+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{12}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{12}}-\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{12}})\right]+C.$$

3. $\int\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\cdot\frac{dx}{(x+2)(3x+5)}=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x+3}{x+2}}+C.$

4. $\int\frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{(3-x)^2}\left(\frac{19}{2}+x\right)+C.$

5. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{x^2-2}{2}\sqrt{1+x^2}+C.$

6. $\int x^5\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=-\frac{1}{7}\sqrt{1-x^2}\left[x^6-\frac{8}{5}x^4+\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}\right]+C.$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}+3}=-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}+3}+\ln(x+\sqrt{9+x^2})+C.$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-2}{3}+C.$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{-2-5x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(6x+5)+C.$

10. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}+C.$

11. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2}-$

$$-\frac{1}{8}\ln|1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}|+C$$

12. $\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}=-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{2}+C.$

13. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \frac{3}{2}\arcsin 2x + C.$

14. $\int \frac{11x^4 - 195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx =$

$= \frac{1}{4}(11x^3 - 77x^2 + 105x - 175)\sqrt{x^2+6x+5} + C$

15. $\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}} =$

$= \frac{6x-13}{2(x-2)^2}\sqrt{3x^2-8x+5} -$

$- \frac{9}{2}\ln\left|\frac{2x-3+\sqrt{3x^2-8x+5}}{x-2}\right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$

18. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x+2}} = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{2(x+1)^2} +$

$+ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\right| + C.$

19. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{3a+x}{2}\sqrt{2ax-x^2} +$

$+ \frac{3}{2}a^2 \arcsin\frac{x-a}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\arccos\frac{1+px}{x+p} + C$ con $|p| < 1$.

CAPITULO XV

INTEGRACION DE CIERTAS FUNCIONES NO ALGEBRAICAS

1. Observaciones Generales. Como caso más grales de funciones no algebráicas, se presenta la integra

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx,$$

analizada en el Cap. XII, Pág.207.

Ejemplos.

1. $I=\int \sin(a^x)\,a^x\,dx \qquad (a>1).$

Haciendo

$$a^x=t, \quad a^x \ln a\,dx=dt,$$

Obtenemos

$$I=\frac{1}{\ln a}\int \sin t\,dt=-\frac{\cos t}{\ln a}+C,$$

por consiguiente

$$I=-\frac{\cos(a^x)}{\ln a}+C.$$

2. $I=\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}.$

Haciendo

$$\ln x=t, \frac{dx}{x}=dt,$$

obtenemos

$$I=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C,$$

por lo que

$$I=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C.$$

3. $I=\int e^{\sin x}\cos x\,dx.$

Haciendo

$$\sin x=t, \quad \cos x\,dx=dt,$$

obtenemos

$$I=\int e^t\,dt=e^t+C,$$

consecuentemente

$$I=e^{\sin x}+C.$$

4. $I=\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx,$

$$I=\int \sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx=\int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\cos x\,dx.$$

Haciendo

$$\sin x=t.$$

Entonces

$$I=\int t^2(1-t^2)\,dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C,$$

de donde

$$I=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

5. $I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

$$I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Escribiendo

$$\operatorname{tg} x=t, \frac{dx}{\cos^2 x}=dt,$$

tenemos:

$$I=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C;$$

Así pues

$$I=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C.$$

6. $I=\int (\arcsin x)^3\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Hagamos aquí

$$\arcsin x=t,\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt,$$

obtenemos:

$$I=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C,$$

por lo que

$$I=\frac{1}{4}(\arcsin x)^4+C.$$

2. Integrales de Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

I. Una integral del tipo

$$\int f(a^x)\,dx$$

se transforma, mediante la substitución $a^x=t$ en la integral

$$\frac{1}{\ln a}\int\frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Ejemplo 1.

$$I=\int\sqrt{1-a^x}\,dx.$$

Hagamos $a^x=t$, entonces $I=\frac{1}{\ln a}\int\sqrt{1-t}\,\frac{dt}{t}$.

Suponiendo ahora que

$$1-t=z^2,$$

obtenemos:

$$I=-\frac{2}{\ln a}\int\frac{z^2\,dz}{1-z^2}=\frac{1}{\ln a}\left[2z+\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|\right]+C.$$

De donde, volviendo a la variable x:.

$$z=\sqrt{1-t}=\sqrt{1-a^x},$$

encontramos

$$I=\frac{1}{\ln a}\left[2\sqrt{1-a^x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-a^x}}{1+\sqrt{1-a^x}}\right|\right]+C.$$

II. Una integral del tipo

$$\int W(x)\,a^x\,dx,$$

donde W(x) es un polinomio que se calcula por el método de la integración por partes.

Haciendo

$$u=W(x),\qquad du=W'(x)\,dx,$$
$$dv=a^x\,dx,\qquad v=\frac{a^x}{\ln a},$$

obtenemos:

$$\int W(x)\,a^x\,dx=\frac{W(x)\,a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int W'(x)\,a^x\,dx.$$

Dado que el grado del polinomio W'(x) es menor que el del polinomio W(x), entonces, procediendo de la misma manera, llegaremos finalmente a la integral

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}.$$

Ejemplo 2. $$I=\int (x^2-2x+3)\,a^x\,dx.$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$I=\frac{(x^2-2x+3)\,a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int (2x-2)\,a^x\,dx.$$

Aplicamos a la última integral nuevamente el método de la integra-- ción por partes:

$$\int (2x-2)\,a^x\,dx=\frac{(2x-2)\,a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int 2a^x\,dx.$$

De este modo, finalmente obtenemos:

$$I=\left[\frac{x^2-2x+3}{\ln a}-\frac{2x-2}{(\ln a)^2}+\frac{2}{(\ln a)^3}\right]a^x+C.$$

III . Una integral del tipo

$$\int W(\ln x)\,dx,$$

donde W es un polinomio, se transforma en una integral del tipo II me-- diante la substitución $$\ln x=t.$$

En efecto, tenemos:

$$x=e^t,\quad dx=e^t\,dt,$$

por consiguiente,

$$\int W(\ln x)\,dx=\int W(t)\,e^t\,dt.$$

Ejemplo 3.

$$I=\int (\ln^2 x-2\ln x+3)\,dx.$$

Haciendo

$$\ln x=t,$$

obtenemos:

$$I=\int (t^2-2t+3)\,e^t\,dt.$$

Integrando por partes, como en el ejemplo 2, hallamos:

$$I=(t^2-4t+7)\,e^t+C,$$

así que

$$I=(\ln^2 x-4\ln x+7)x+C.$$

IV. Una integral del tipo

$$\int x^n(\ln x)^m\,dx$$

(donde m es un entero positivo y n un entero) se calcula mediante la --- substitución

$$\ln x=t,$$

si n = - 1, o bien mediante la integración por partes si n ≠ - 1.

A saber, hagamos

$$u=(\ln x)^m,\qquad du=m(\ln x)^{m-1}\frac{dx}{x},$$
$$dv=x^n\,dx,\qquad v=\frac{x^{n+1}}{n+1};$$

entonces

$$\int x^n (\ln x)^m \, dx = \frac{x^{n+1} (\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln x)^{m-1} \, dx.$$

Procediendo análogamente, llegamos a la integral $\int x^n \, dx$.

Las integrales del tipo

$$\int W(x) (\ln x)^m \, dx$$

(donde $m > 0$ ent., $W(x)$ es un polinomio) se calculan como las del tipo IV.

Ejemplo 4.

$$I = \int (2x - 3) (\ln x)^2 \, dx.$$

Integramos por partes. Haciendo

$$u = (\ln x)^2, \qquad du = 2 \ln x \frac{dx}{x},$$
$$dv = (2x - 3) \, dx, \qquad v = x^2 - 3x.$$

obtenemos:

$$I = (x^2 - 3x) (\ln x)^2 - 2 \int (x - 3) \ln x \, dx.$$

Integrando nuevamente por partes, encontramos:

$$\int (x - 3) \ln x \, dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - 3x\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2} x - 3\right) dx.$$

Entonces,

$$I = (x^2 - 3x) (\ln x)^2 - (x^2 - 6x) \ln x + \frac{1}{2} x^2 - 6x + C.$$

3. Integración de Funciones Trigonométricas.

I. Si $R(u,v)$ es una función racional de las variables u, v, la integral $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ se transforma en una integral de una función racional mediante la substitución

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

En efecto, tenemos:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ya que

$$x = 2 \operatorname{arctg} t,$$

entonces

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Puesto que $\sin x$, $\cos x$ y dx se expresan racionalmente en función de la variable t, la integral $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ podrá entonces transformarse en una integral de función racional con ayuda de la substitución indicada.

Ejemplo 1.

$$I = \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}.$$

Haciendo

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

obtenemos:

$$I=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}-\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}t-1},$$

es decir,

$$I=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{5}}{t+2}\right)dt=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+2}\right|+C.$$

Así pues,

$$I=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right|+C.$$

II. En algunos casos, la integral $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$ puede calcularse con mayor rapidez, empleando las substituciones que se dan enseguida.

a) Si R (u, v) es una función impar de la variable u, es decir, si

$$R(u,\ v)=-R(-u,\ v),$$

se emplea entonces la substitución

$$\cos x=t;$$

así que

$$\sin x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\quad (0<x<\pi).$$

b) Si R(u, v) es una función impar de la variable v, es entonces posible emplear la substitución

$$\sin x=t,$$

$$\cos x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}\right).$$

c) Si R(u, v) es una función par de las variables u,v, esto es, si

$$R(u,\ v)=R(-u,\ -v),$$

se hace entonces uso de la substitución

$$\operatorname{tg}x=t\quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ejemplos.

2. $I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}\,dx.$

La función integrando es impar con relación a sen x, porque

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}=-\frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x+1};$$

apliquemos por consiguiente la substitución

$$\cos x=t,\qquad -\sin x\,dx=dt.$$

Así pues

$$I=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt=\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=t-2\operatorname{arctg}t+C.$$

Obtenemos finalmente:

$$I = \cos x - 2 \operatorname{arctg} (\cos x) + C.$$

3. $I = \int \frac{\cos^3 x}{4 \sin^2 x - 1} dx.$

La función integrando es impar con respecto a cos x, así que es posible emplear la substitución

$$\sin x = t, \qquad \cos x \, dx = dt.$$

De esta manera

$$I = \int \frac{1 - t^2}{4t^2 - 1} dt = \int \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \frac{1}{2t - 1} - \frac{3}{8} \frac{1}{2t + 1} \right] dt,$$

de donde

$$I = -\frac{1}{4} t + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{2t - 1}{2t + 1} \right| + C;$$

finalmente,

$$I = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{2 \sin x - 1}{2 \sin x + 1} \right| + C.$$

4. $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$

Dado que la función integrando es una función par en relación con $\sin x$ y $\cos x$, hacemos entonces

$$\operatorname{tg} x = u.$$

Tenemos, de este modo,

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 4u + 5} = \int \frac{du}{(u - 2)^2 + 1} = \operatorname{arctg} (u - 2) + C,$$

por consiguiente

$$I = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x - 2) + C.$$

III. Consideremos ahora una integral del tipo

$$\int \sin^s x \cos^k x \, dx.$$

Si s y k son enteros, entonces, como se deduce de II, Pág. 247.

para s impar, aplicamos la substitución cos x = t

para k impar, aplicamos la substitución sen x = t

para s y k pares, aplicamos la substitución $\operatorname{tg} x = t$.

Si s y k son números fraccionarios, entonces, haciendo sen x = t, obtenemos:

$$\int \sin^s x \cos^k x \, dx = \int t^s (1 - t^2)^{\frac{k-1}{2}} dt.$$

La última integral es una integral binomia. Solo puede calcularse en el caso en que uno de los números $\frac{s+1}{2}$, $\frac{k-1}{2}$, $\frac{s+k}{2}$ sea entero (Pág.288)

5. $I = \int \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx = \int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x \, dx.$

Ya que $\frac{s+k}{2} = 0$, entonces, aplicando la substitución

$$\sin x = t,$$

obtenemos la integral
$$I=\int t^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{3}{4}}\,dt,$$

la cual se toma en la última forma. En efecto, haciendo
$$t=\sqrt{z},$$
obtenemos:
$$I=\frac{1}{2}\int z^{-1}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-\frac{3}{4}}dz.$$

Substituyendo, finalmente
$$\frac{1-z}{z}=w^4,$$
obtenemos:
$$I=-2\int\frac{dw}{w^4+1}.$$

Desarrollando la función integrando en fracciones elementales +) e integrando
$$\int\frac{dw}{w^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+w\sqrt{2}+w^2}{1-w\sqrt{2}+w^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{w\sqrt{2}}{1-w^2}+C.$$

Ya que
$$w=\sqrt[4]{\frac{1-z}{z}}=\sqrt[4]{\frac{1-t^2}{t^2}}=\sqrt[4]{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{\operatorname{ctg} x},$$
entonces
$$I=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2\operatorname{ctg} x}+\operatorname{ctg} x}{1-\sqrt{2\operatorname{ctg} x}+\operatorname{ctg} x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{ctg} x}}{1-\operatorname{ctg} x}+C.$$

IV. Integrales del tipo
$$\int W(x)\sin mx\,dx,$$
donde W(x) es un polinomio, se calculan por el método de integración por partes.

En efecto, haciendo
$$u=W(x),\qquad du=W'(x)\,dx,$$
$$dv=\sin mx\,dx,\qquad v=-\frac{1}{m}\cos mx,$$
obtenemos:
$$\int W(x)\sin mx\,dx=-\frac{1}{m}W(x)\cos mx+\frac{1}{m}\int W'(x)\cos mx\,dx.$$

Procediendo análogamente, reduciremos el grado del polinomio y llegaremos finalmente a la integral $\int\cos mx\,dx$ o $\int\sin mx\,dx$.

Ejemplo. 6
$$I=\int(x^2-2x+3)\sin 2x\,dx.$$

Integremos por partes:
$$I=-\frac{1}{2}(x^2-2x+3)\cos 2x+\frac{1}{2}\int(2x-2)\cos 2x\,dx,$$
$$\int(2x-2)\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}(2x-2)\sin 2x-\frac{1}{2}\int 2\sin 2x\,dx.$$

+) $w^4+1=(w^2+w\sqrt{2}+1)(w^2-w\sqrt{2}+1)$.

De donde

$$I = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Observación. La función $\sin^k x\,(k>0)$ puede siempre llevarse a la forma de una suma de senos y cosenos de argumentos múltiplos de x. -- Como se sabe,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

de donde

$$\sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \sin x$$

Pero

$$\cos 2x \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x+x) - \frac{1}{2}\sin(2x-x),$$

por lo tanto

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

En general, disponiendo ya de una representación tal para $\sin^k x$, obtenemos de ella una fórmula análoga para $\sin^{k+1} x$, al multiplicar ambos -- miembros de la igualdad por $\sin x$ y haciendo uso después de las siguientes relaciones:

$$\sin x \cos vx = \frac{1}{2}\sin(v+1)x - \frac{1}{2}\sin(v-1)x,$$

$$\sin x \sin vx = \frac{1}{2}\cos(v-1)x - \frac{1}{2}\cos(v+1)x.$$

De donde se infiere que integrales del tipo

$$\int W(x)\sin^k x\,dx.$$

$(k>0$ entero) pueden llevarse a la forma de las del tipo IV.

Ejemplo 7.

$$I = \int (x^3 - 1)\sin^2 x\,dx.$$

Puesto que

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

entonces

$$I = \frac{1}{2}\int (x^3-1)\,dx - \frac{1}{2}\int (x^3-1)\cos 2x\,dx.$$

Aplicando a la segunda integral el método de integración por partes, obtenemos

$$\int (x^3-1)\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}(x^3-1)\sin 2x - \frac{3}{2}\int x^2 \sin 2x\,dx,$$

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx,$$

$$\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C,$$

por consiguiente,

$$I = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(2x^3 - 3x - 2)\sin 2x - \frac{3}{16}(2x^2 - 1)\cos 2x + C.$$

$$\int f(\arcsin x)\, dx$$

por medio de la substitución

$$\arcsin x = t$$

se lleva a la forma

$$\int f(t) \cos t\, dt.$$

Si ahora f(t) es un polinomio, entonces la última integral podrá calcularse por el método de integración por partes (ver página 249).

Ejemplo 1.

$$I = \int (\arcsin x)^2\, dx.$$

Apliquemos la substitución

$$\arcsin x = t.$$

Entonces

$$= \int t^2 \cos t\, dt.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$I = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t\, dt,$$

$$\int t \sin t\, dt = -t \cos t + \int \cos t\, dt = -t \cos t + \sin t + C.$$

Así pues,

$$I = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t + C.$$

Puesto que

$$\sin t = x, \quad \cos t = \sqrt{1 - x^2},$$

entonces

$$I = [(\arcsin x)^2 - 2] x + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C.$$

II. La integral

$$\int W(x) \arcsin x\, dx$$

(donde W(x) es un polinomio) se calcula por el método de integración por partes.

Efectivamente, haciendo

$$u = \arcsin x, \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$dv = W(x)\, dx, \qquad v = \int W(x)\, dx = W_1(x),$$

obtenemos:

$$\int W(x) \arcsin x\, dx = W_1(x) \arcsin x - \int \frac{W_1(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

Ejemplo 2.

$$I = \int 2x \arcsin x\, dx.$$

Integramos por partes

$$I = x^2 \arcsin x - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Calculando la última integral según el método descrito en la Pág.238, obtenemos

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C,$$

por lo que

$$I = x^2 \arcsin x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

III. La integral

$$\int W(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$$

(donde W(x) es un polinomio) se calcula por el método de integración -- por partes.

En efecto, haciendo

$$u = \mathrm{arctg}\,x, \qquad du = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$dv = W(x)\,dx, \qquad v = \int W(x)\,dx = W_1(x),$$

obtenemos:

$$\int W(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = W_1(x)\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{W_1(x)\,dx}{1+x^2}.$$

Ejemplo 3.

$$I = \int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

Integramos por partes. Obtenemos:

$$I = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \mathrm{arctg}\,x + C;$$

por consiguiente

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C.$$

5. Ejemplos de Funciones no Integrables por Métodos Elementales.

Ya hemos estudiado una serie de métodos que en algunos casos permiten expresar la integral indefinida de una función dada por medio de funciones elementales. No debe sin embargo pensarse que pueda así representarse una integral indefinida por una función continua cualquiera. Es posible, por ejemplo, demostrar que las integrales

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx$$

no pueden ser expresadas por funciones elementales.

Ha sido también demostrado +) que, con excepción de los tres casos que hemos estudiado anteriormente, las integrales binomias no pueden ser expresadas en forma elemental (Pág.227). La integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{W(x)}},$$

+) Por P. L. Chebishev (Nota de la redacción rusa)

donde W(x) de un polinomio de tercero ó mayor grado puede también, en ciertos casos, representarse en forma elemental.

Ejemplos.

1. La integral $\int \frac{dx}{\ln x}$ no puede expresarse por funciones elementales.

En efecto, introduciendo una nueva variable por medio de la substitución $x=e^y$ obtenemos:
$$\int \frac{dx}{\ln x}=\int \frac{e^y}{y}\,dy.$$

Dado que la integral en el segundo miembro no puede expresarse por funciones elementales, sucederá lo mismo para la integral dada.

2. La integral $\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ integrada por partes, se transforma en la siguiente forma
$$\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx=-\frac{\sin x}{x}+\int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

En el segundo miembro tenemos una integral no expresable por funciones elementales, por lo que la integral dada no podrá tampoco expresarse así.

PROBLEMAS

1. $\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx=\frac{5}{3}\ln|e^x-1|+\frac{4}{3}\ln(e^x+2)+C.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{-1+\sqrt{1+e^{2x}}}{+1+\sqrt{1+e^{2x}}}+C.$
3. $\int \frac{dx}{a^2e^x+b^2e^{-x}}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{ae^x}{b}+C \quad (a,\ b\neq 0).$
4. $\int x^4e^x\,dx=e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)+C.$
5. $\int e^x(x^2+x+1)\,dx=e^x(x^2-x+2)+C.$
6. $\int [(\ln x)^2-2\ln x]\,dx=x[(\ln x)^2-4\ln x+4]+C.$
7. $\int (\ln x)^5\,dx=x[(\ln x)^5-5(\ln x)^4+20(\ln x)^3-60(\ln x)^2+$ $+120\ln x-120]+C.$
8. $\int x^2(\ln x)^2\,dx=\frac{x^3}{3}\left[(\ln x)^2-\frac{2}{3}\ln x+\frac{2}{9}\right]+C.$
9. $\int \frac{dx}{3+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$
10. $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx=2\left(\frac{1}{7}\cos^2 x-\frac{1}{3}\right)\cos x\sqrt{\cos x}+C.$
11. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^2 x\right)\operatorname{tg}^3 x+C.$
12. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)+C.$
13. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 2x}{2}+x\right)+C.$
14. $\int \frac{5+3\sin x+7\cos x}{\sin 2x}\,dx=$ $=\frac{5}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{7}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$
15. $\int \sin^5 x\,dx=-\frac{1}{80}\cos 5x+\frac{5}{48}\cos 3x-\frac{5}{8}\cos x+C.$

16. $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - 2\cos x\right] + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + C.$

18. $\int x^3 \cos x \, dx = (3x^2 - 6)\cos x + (x^3 - 6x)\sin x + C.$

19. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$

20. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

21. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x \, dx =$
$= \left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C.$

22. $\int \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$

Sugestiones.
13) Substituir en primer lugar el producto de los cosenos por su suma; 19) integrar por partes; 21) expresar el numerador del quebrado en la forma x^2+1-1 y descomponer la integral en dos integrales, integrando enseguida por partes; 22) integrar por partes.

CAPITULO XVI

LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Definición de la Integral Definida. Sea una función y = f(x), definida y acotada en el intervalo (a, b) $(a<b)$. Dividamos el intervalo (a, b) en un número arbitrario de segmentos (no necesariamente

iguales), cuyas longitudes designaremos con $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ *).+), respectivamente.

Designemos con $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ los puntos arbitrariamente tomados, uno en cada segmento.

Formenos la suma:

$$A=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Fácilmente se interpreta el significado geométrico de la suma A, sobre todo cuando la función f(x) es no-negativa en el intervalo (a,b). En efecto, en este caso, el producto $f(\xi_1)\Delta x_1$ es igual al área del rectángulo cuya base es Δx_1 y cuya altura es $f(\xi_1)$. La suma A, por consiguiente, representa la suma de las áreas de los rectángulos cuyas bases son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ y cuyas alturas son $f(\xi_1), f(\xi_2), \cdots f(\xi_n)$(Fig. 45).

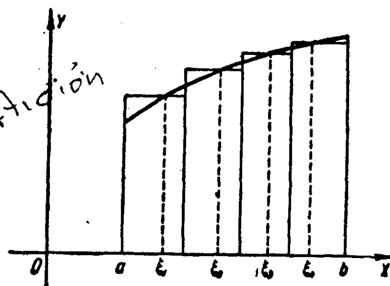


Fig. 45

Llamaremos cortadura δ. al conjunto de los segmentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ Designaremos con el símbolo $|\delta|$. a la longitud del mayor segmento perteneciente a la cortadura.

Llamaremos normal a la secuencia de cortaduras $\{\delta_n\}$ si

$$\lim_{n\to\infty}|\delta_n|=0,$$

en otras palabras, si la longitud del mayor de los segmentos, perteneciente a la cortadura δ_n, tiende a cero, cuando el número n tiende al infinito.

Por ejemplo, dividiendo el intervalo (a, b) en dos, tres, cuatro, cinco etc. segmentos iguales, obtenemos una secuencia normal de cortaduras.

Escogiendo una secuencia normal arbitraria de cortadura $\{\delta_n\}$ y formando para cada cortadura δ_n la correspondiente suma An, obtenemos una secuencia de sumas $\{A_n\}$. Para una secuencia dada de cortaduras $\{\delta_n\}$ pueden obtenerse diferentes secuencias de sumas $\{A_n\}$ dependiendo de qué puntos ξ se escojan.

+) En lo sucesivo frecuentemente el autor representa por $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ no solamente las longitudes sino también los propios segmentos.

Nota de la redacción.

Definición. Si la función f(x) posee la propiedad de que para cada secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ la secuencia $\{A_n\}$ de sumas correspondiente converge, (independientemente de la elección de los puntos ξ_i), se dice entonces que la función f(x) es integrable en el intervalo (a,b).

Demostremos que si la función es integrable entonces, para una secuencia normal $\{\delta_n\}$ cualquiera de cortaduras, las sumas correspondientes $\{A_n\}$ tienden siempre a uno y al mismo límite.

En efecto, admitamos que la función f(x) es integrable en (a,b). Escojamos dos secuencias normales de cortaduras $\{\delta_n\}$ y $\{\delta'_n\}$ designemos con $\{A_n\}$ y $\{A'_n\}$ las correspondientes secuencias de sumas. Entonces la secuencia de cortaduras $\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2, \ldots, \delta_n, \delta'_n, \ldots$ es también una secuencia normal. De esta manera, de acuerdo con la condición , la secuencia de las sumas $A_1, A_1', A_2, A_2', \ldots$ converge. Ya que las subsecuencias de una secuencia convergente convergen a uno y al mismo límite, entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A'_n.$$

Vemos esta forma que las secuencias de sumas $\{A_n\}$ y $\{A_n'\}$ convergen a uno y al mismo límite.

El límite común de las secuencias $\{A_n\}$, correspondientes a las secuencias normales de cortaduras recibe el nombre de integral definida de la función f(x) en el intervalo (a,b).

La integral definida se designa con el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 1. Sea y = f(x) una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. (Posteriormente se demostrará que tal función es integrable). Admitamos que $f(x)>0$ para $a<x<b$. Designemos con D el dominio comprendido entre la curva, el eje OX y las ordenadas x = a, x = b (Fig. 46).

Formemos una cortadura δ arbitraria del segmento $[a, b]$. Sean M_1, m_1, M_2, m_2, ...los valores máximos y mínimos respectivamente que la función f(x) toma en los segmentos correspondientes de la cortadura δ. Designemos respectivamente, con $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi'_1, \xi'_2, \ldots$ los puntos en los que la función toma los valores máximos y mínimos arriba indicados. De este modo

$$f(\xi_1)=M_1,\ f(\xi_2)=M_2,\ \ldots,\ f(\xi'_1)=m_1,\ f(\xi'_2)=m_2,\ \ldots$$

Sean

$$A=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots,$$
$$A'=f(\xi_1')\Delta x_1+f(\xi'_2)\Delta x_2+\ \ldots\ =m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\ \ldots$$

Los rectángulos cuyas bases son Δx_1, Δx_2, ... y las correspondientes alturas M_1, M_2, ... delimitan un dominio D, mientras que los rectángulos con las mismas bases, pero con alturas m_1, m_2, ... quedan comprendidas en este dominio.

Puesto que para cada secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A'_n = \int_a^b f(x)\,dx,$$

es entonces natural determinar el área del dominio D como el valor de - la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

lo que corresponderá a nuestras representaciones intuitivas

O b s e r v a c i ó n 2. En una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ (en oposición a - la integral indefinida) en lugar de x puede escribirse otra letra cualquiera. Esto es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$$

Ejemplos.

1. La función y = c es integrable en cualquier intervalo y

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Efectivamente, formando una cortadura δ cualquiera y escogiendo - arbitrariamente los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ uno de cada intervalo perteneciente a la cortadura δ, obtenemos:

$$f(\xi_1) = c, \quad f(\xi_2) = c, \quad \ldots,$$

por consiguiente,

$$A = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + \ldots = c(b-a).$$

De esta manera, por definición:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

La gráfica de la función y = c es una recta, paralela al eje OX. Si -- $c > 0$, nuestra integral es entonces igual al área del rectángulo limitado- por la recta dada, por el eje OX y por las rectas x = a, x = b.

2. La función y = x es integrable en cualquier intervalo y

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Formemos una cortadura arbitraria δ del intervalo (a,b). Escogiendo arbitrariamente los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ uno en cada uno de los segmentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ de la cortadura δ y haciendo $f(x) = x$ obtenemos:

$$f(\xi_1) = \xi_1, \quad f(\xi_2) = \xi_2, \quad \ldots,$$

por consiguiente,

$$A = \xi_1\Delta x_1 + \xi_2\Delta x_2 + \ldots + \xi_n\Delta x_n.$$

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los puntos medios de los segmentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Entonces

$$A = x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + \ldots + x_n\Delta x_n + (\xi_1 - x_1)\Delta x_1 + \\ + (\xi_2 - x_2)\Delta x_2 + \ldots + (\xi_n - x_n)\Delta x_n.$$

Designemos los puntos de división (es decir los extremos de los segmentos que forman la cortadura δ) por las letras

$$a<a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n=b.$$

Obtenemos:

$$\Delta x_1=a_1-a, \quad x_1=\frac{a_1+a}{2},$$
$$\Delta x_2=a_2-a_1, \quad x_2=\frac{a_2+a_1}{2}$$

Por lo tanto

$$x_1\Delta x_1+x_2\Delta x_2+\ldots+x_n\Delta x_n=$$
$$=\frac{a_1^2-a^2}{2}+\frac{a_2^2-a_1^2}{2}+\ldots+\frac{b^2-a_{n-1}^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Así pues

$$A=\frac{b^2-a^2}{2}+R,$$

donde

$$|R|=|(\xi_1-x_1)\Delta x_1+(\xi_2-x_2)\Delta x_2+\ldots|\leqslant$$
$$\leqslant|\xi_1-x_1||\delta|+|\xi_2-x_2||\delta|+\ldots$$

Como

$$|\xi_1-x_1|\leqslant\frac{1}{2}\Delta x_1, \quad |\xi_2-x_2|\leqslant\frac{1}{2}\Delta x_2, \quad \ldots,$$

entonces

$$|R|\leqslant\frac{1}{2}\Delta x_1|\delta|+\frac{1}{2}\Delta x_2|\delta|+\ldots=\frac{1}{2}(b-a)|\delta|.$$

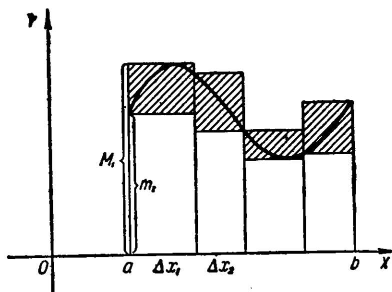


Fig. 46

Por lo tanto, si tomamos una secuencia normal arbitraria de cortaduras $\{\delta_n\}$ entonces

$$A_n=\frac{b^2-a^2}{2}+R_n,$$

y

$$|R_n|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)|\delta_n|.$$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty}|\delta_n|=0$, entonces $\lim R_n=0$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{b^2-a^2}{2},$$

así que

$$\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

La imagen geométrica de la función y=x es una recta. Si O $<a<b$, entonces la integral definida representa el área del dominio limitado por la recta dada, por el eje OX y por las rectas x=a, x=b; es obvio que se trata del área de un trapecio.

3. Si la función f(x) es idénticamente nula en todo el intervalo (a,b) con exclusión de un número finito de puntos, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=0.$$

Sea k el número de puntos en los que la función es distinta de cero, y sea M el valor máximo de la función $f(x)$ en el intervalo (a,b). Para una cortadura δ, cualquiera, tenemos

$$|A| \leqslant 2kM\,|\delta|.$$

Así pues, si $\{\delta_n\}$ es una secuencia normal arbitraria de cortaduras - y $\{A_n\}$ es la secuencia de las sumas correspondientes, entonces

$$|A_n| \leqslant 2kM\,|\delta_n|, \quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} |\delta_n| = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$, por lo que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

2. Algunas propiedades de las Integrales Definidas.

De la definición de integral definida, se deduce fácilmente los siguientes teoremas:

Teorema 1. La suma de dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, integrables en el intervalo (a,b), es también integrable en este intervalo y

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Demostración. Si es δ una cortadura arbitraria, tenemos :

$$A = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots,$$
$$A' = \varphi(\xi_1)\,\Delta x_1 + \varphi(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots,$$
$$A + A' = [f(\xi_1)+\varphi(\xi_1)]\,\Delta x_1 + [f(\xi_2)+\varphi(\xi_2)]\,\Delta x_2 + \ldots$$

De este modo, si $\{\delta_n\}$ es una secuencia normal arbitraria de cortaduras, entonces

$$\lim_{n=\infty} (A_n + A'_n) = \lim_{n=\infty} A_n + \lim_{n=\infty} A'_n,$$

por consiguiente, la función $f(x)+\varphi(x)$ es integrable en el intervalo (a,b) y

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Análogamente se puede demostrar el siguiente

Teorema 2. El producto de una constante arbitraria C por la función f(x), integrable en (a,b) es integrable en este intervalo y

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplos.

1. Basándose en los ejemplos del párrafo 1, determinar el valor de la siguiente integral:

$$I = \int_0^1 (bx+c)\,dx.$$

Tenemos:

$$I = \int_0^1 bx\,dx + \int_0^1 c\,dx = b\int_0^1 x\,dx + c\int_0^1 dx = \frac{1}{2}b + c.$$

2. Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ difieren entre sí únicamente en un número finito de puntos del intervalo (a,b), entonces, suponiendo que una de ellas sea integrable, puede afirmarse que la otra también lo es, y que además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

En efecto, admitamos que $\varphi(x)$ es integrable en el intervalo (a,b). En virtud del ejemplo 3, Pág. 258 tenemos:

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\,dx = 0. \qquad (1)$$

Puesto que

$$f(x) = [f(x)-\varphi(x)] + \varphi(x),$$

entonces la función f(x), suma de dos funciones integrables, es integrable y, en virtud de (1), se obtiene la relación deseada.

3. Integrabilidad de una Función Continua. Sea y=f(x) una función continua en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Formemos una cortadura arbitraria δ del segmento $[a, b]$. Designemos con M_1, M_2 ... los valores máximos y con m_1, m_2, ... los valores mínimos que la función f(x) toma respectivamente en los segmentos Δx_1, Δx_2, ... de la cortadura δ. Hagamos:

$$\left.\begin{aligned} S &= M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots, \\ s &= m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots, \\ A &= f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Llamaremos suma superior al número S y suma inferior á s, correspondientes a la cortadura δ.

Tenemos obviamente:

139 $$s \leqslant A \leqslant S.$$

Lema 1. Si la función f(x) es continua en el intervalo (a,b) y si $\{\delta_n\}$ presenta una secuencia normal arbitraria de cortaduras del intervalo (a,b), entonces $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$ (S_n y s_n representan la suma superior e inferior correspondientes a la cortadura δ_n).

Demostración. Sea δ una cortadura arbitraria. Conservando la notación anterior, tenemos, en virtud de (1):

$$S - s = (M_1 - m_1)\,\Delta x_1 + (M_2 - m_2)\,\Delta x_2 + \dots \qquad (2)$$

Puesto que la función es uniformemente continua en el intervalo $[a, b]$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$ se encuentra un $\eta > 0$, tal, que si $|\xi' - \xi''| < \eta$, entonces $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon$. Admitamos que $|\delta| < \eta$; entonces

Por consiguiente $$M_1 - m_1 < \varepsilon,\ M_2 - m_2 < \varepsilon, \dots$$

es decir $$S - s < \varepsilon\Delta x_1 + \varepsilon\Delta x_2 + \dots = \varepsilon(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots),$$

$$0 \leq S - s < \varepsilon (b - a), \qquad |\delta| < \eta. \qquad (3)$$

Puesto que $\lim\limits_{n \to \infty} |\delta_n| = 0$, existe entonces un número N tal que para cada $n > N$ se tendrá $|\delta_n| < \eta$. De donde, en virtud de (3), para $n > N$ tendremos

$$0 \leq S_n - s_n < \varepsilon (b - a).$$

Dado que ε puede ser un número positivo cualquiera, entonces

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0.$$

Lema 2. Sean δ y δ' dos cortaduras de $[a, b]$. Si la función f(x) es continua en $[a, b]$, y si S designa a la suma superior correspondiente a la cortadura δ y s' la suma inferior, correspondiente a la cortadura δ', entonces

$$S \geq s'$$

(es decir toda suma superior es igual o mayor que una suma inferior cualquiera).

Demostración. Sea

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots, \quad s' = m_1 \Delta x'_1 + m_2 \Delta x'_2 + \ldots$$

Admitamos inicialmente que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$ (ver Fig. 46). En este caso D designará la región limitada por la curva y =f(x), el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Fácilmente se observa que los rectángulos con bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ y alturas $M_1, M_2, \ldots$ cubren por completo al dominio D, y que dentro de este dominio se hallan todos los rectángulos con bases $\Delta x'_1, \Delta x'_2, \ldots$ y alturas $m'_1, m'_2, \ldots$ Se deduce de aquí que los rectángulos con bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ cubren a los rectángulos con bases $\Delta x'_1, \Delta x'_2, \ldots$. Puesto que S es la suma de las áreas de los rectángulos primeros y s' la de los segundos, entonces

$$S \geq s'.$$

Si ahora la función f(x) es no-negativa en $[a, b]$, entonces, haciendo

$$\bar{f}(x) = f(x) - m$$

(m es el valor mínimo de la función f(x), obtenemos:

$$\bar{f}(x) \geq 0 \qquad a \leq x \leq b.$$

De otra manera $\bar{S} \geq \bar{s}'$ (aquí, $\bar{S}$ es la suma superior de la función $\bar{f}(x)$, correspondiente a la cortadura δ y $\bar{s}'$ es la suma inferior, correspondiente a la cortadura δ').

Pero

$$\bar{S} = \bar{M}_1 \Delta x_1 + \bar{M}_2 \Delta x_2 + \ldots = (M_1 - m) \Delta x_1 + (M_2 - m) \Delta x_2 + \ldots$$

($\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots$ son los valores máximos de la función $\bar{f}(x)$ en los intervalos Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$). Así pues.

$$\bar{S} = S - m (b - a).$$

Análogamente obtenemos:

$$\bar{s'} = s' - m(b-a).$$

Ya que $\bar{S} \geq \bar{s'}$, entonces

$$S - m(b-a) \geq s' - m(b-a),$$

es decir

$$S \geq s'.$$

Teorema. Una función $y = f(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$ es integrable en este intervalo.

Demostración. Sea $\{\delta_n\}$ una secuencia normal arbitraria de cortaduras $\{S_n\}$, $\{s_n\}$ las sumas, superior e inferior respectivamente, correspondientes a las cortaduras δ_n y $\{A_n\}$ las sumas definidas en el párrafo 1.

Si p y q son números naturales arbitrarios, entonces, de acuerdo con el Lema 2,

$$S_p \geq s_q, \quad S_q \geq s_p.$$

Por lo que

$$S_p - S_q \geq s_q - S_q, \quad S_q - S_p \geq s_p - S_p.$$

De donde se sigue que

$$-(S_q - s_q) \leq S_p - S_q \leq S_p - s_p. \tag{4}$$

Dado que de acuerdo con el lema 1

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0,$$

entonces, escogiendo un número arbitrario $\varepsilon > 0$, hallamos un N tal que para $n > N$

$$0 \leq S_n - s_n < \varepsilon.$$

Si, por consiguiente, $p > N$ y $q > N$, entonces, en virtud de (4)

$$-\varepsilon < S_p - S_q < \varepsilon,$$

esto es

$$|S_p - S_q| < \varepsilon.$$

De donde vemos que la secuencia $\{S_n\}$ satisface la condición de Cauchy, siendo por lo tanto convergente.

Puesto que

$$s_n = S_n - (S_n - s_n),$$

entonces, en virtud del lema 1,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Tomando en cuenta que

$$s_n \leq A_n \leq S_n,$$

concluímos, en base en (5), que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} A_n.$$

Así pues. la función f(x) es integrable en el intervalo $[a, b]$.

4. Algunas condiciones de integrabilidad. Presentemos aqui (sin demostración) algunas condiciones de integrabilidad de funciones **discontínuas**.

Teorema 1. Una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, b]$, es integrable en este intervalo.

De aquí se sigue de inmediato que una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad en $[a, b]$, es integrable en todo intervalo parcial $[\alpha, \beta]$ $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$

Es válida así mismo la siguiente proposición.

Teorema 2. Si una función es integrable en el intervalo $[a, b]$, es entonces también integrable en cualquier intervalo parcial $[\alpha,\beta]$ $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$.

Ejemplos.

1. La función

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

es continua en el interior del intervalo (0, 1). Si está definida en los extremos del intervalo por medio de las condiciones

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -1,$$

entonces, como es fácil probar

$$\lim_{x \to +0} f(x) = f(0), \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1).$$

Así pues, esta función es continua también en los extremos del intervalo y por consiguiente, integrable en el intervalo $[0, 1]$

2. La función

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad f(0) = 5,$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$, ya que es acotada y tiene en este intervalo un solo punto de discontinuidad: x = 0.

3. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 \quad » \quad 1 \leqslant x < 2, \\ 3 \quad » \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

es integrable en el intervalo (0,3). En efecto, es acotada y tiene únicamente dos puntos de discontinuidad: $x = 1$ y $x = 2$.

5. Cortadura del Intervalo de Integración.

Teorema. Si $a < b < c$ y si la función f(x) es integrable en el intervalo (a, c), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Demostración. Formemos una secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ del segmento (a,c) de tal suerte que el punto b sea un punto de separación para una cortadura arbitraria δ_n. Representemos con $\{A_n\}$ la secuencia de las sumas correspondientes a las cortaduras $\{\delta_n\}$. La suma A_n

puede escribirse de la siguiente manera:

$$A_n=[f(\xi_1')\Delta x_1'+f(\xi_2')\Delta x_2'+\ldots]+[f(\xi_1'')\Delta x_1''+f(\xi_2'')\Delta x_2''+\ldots],$$

donde $\Delta x_1', \Delta x_2', \ldots$ y $\Delta x_1'', \Delta x_2'', \ldots$ denotan segmentos de la cortadura δ_n, contenidos en (a,b) y en (b, c), respectivamente.

Designando con A_n' la suma encerrada en el primer paréntesis y con A_n'' la encerrada en el segundo, obtenemos:

$$A_n=A_n'+A_n''. \qquad (1)$$

Admitamos que la función es integrable en (a,c); entonces, de acuerdo con el teorema 2, parágrafo 4, será también integrable en (a,b) y en (b, c), y además

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{n\to\infty} A_n'=\int_a^b f(x)\,dx, \quad \lim_{n\to\infty} A_n''=\int_b^c f(x)\,dx.$$

De donde, en virtud de (1), se deduce la validez de nuestro teorema.

Ejemplo. Sea f(x) una función dada, definida en el intervalo (0, 1) de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ при } 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 1 \quad \text{»} \quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Esta función es acotada y continua en todo el intervalo (0, 1), ---- excepto en el punto $x=\frac{1}{2}$, siendo por lo tanto integrable. Tenemos:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

(ver los ejemplos del parágrafo 1).

6. Algunas Desigualdades para las Integrales Definidas.

Teorema. Si la función y = f(x) es integrable en el intervalo $[a, b]$ y en él satisface la condición

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \quad \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

entonces

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

La demostración se obtiene de la observación de que para cada cortadura δ tenemos

$$m(b-a)\leqslant A\leqslant M(b-a).$$

Observación. De este teorema se sigue que si

$$f(x)\geqslant 0,$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

Basta en efecto hacer $m=0$.

De aquí se desprende de inmediato que si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, son integrables en $[a, b]$, y si satisfacen para $a \leqslant x \leqslant b$ la desigualdad

$$f(x) \leqslant \varphi(x),$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

En efecto, para $a \leqslant x \leqslant b$ tenemos $\varphi(x) - f(x) \geqslant 0$, por lo que

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0,$$

por consiguiente

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

De aquí se deduce la desigualdad (1) .

Ejemplos.

1. Consideremos la función

$$f(x) = x(1-x).$$

Determinando sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[0, 1]$, se observa fácilmente que

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

De aquí tenemos que

$$0 \leqslant \int_0^1 x(1-x)\,dx \leqslant \frac{1}{4}.$$

La evaluación inmediata de esta integral, según un método conocido, nos da un valor de 1/6, valor que satisface la última desigualdad.

2. La función

$$f(x) = x^x \ (x > 0)$$

es continua en el intervalo (0,1), si imponemos la condición f(0)=1 (ver - Pág 134 ejemplo 6).

Como es fácil comprobar, esta función toma en este intervalo un valor mínimo para $x = \frac{1}{e}$, (ver Pág.129 problema 4). siendo este valor mínimo $e^{-\frac{1}{e}}$. Por otra parte, es evidente que $f(x) \leqslant 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Podemos por lo tanto tomar $m = e^{-\frac{1}{e}}$, $M = 1$

Obtenemos entonces la desigualdad

$$e^{-\frac{1}{e}} \leqslant \int_0^1 x^x dx \leqslant 1 \quad (e^{-\frac{1}{e}} = 0{,}692\ldots).$$

No es posible en este caso calcular el valor exacto de la integral -- por métodos elementales.

3. Si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones continuas en (a,b), entonces para toda

$$I(\lambda)=\int_a^b[f(x)+\lambda\varphi(x)]^2\,dx\geqslant 0,$$

de donde

$$I(\lambda)=\lambda^2\int_a^b\varphi^2(x)\,dx+2\lambda\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx+\int_a^b f^2(x)\,dx\geqslant 0. \qquad (2)$$

Dado que el trinomio

$$\alpha\lambda^2+2\beta\lambda+\gamma$$

es no-negativo para todos los λ cuando y solamente cuando

$$\beta^2-\alpha\gamma\leqslant 0,\ \text{es decir}\ \beta^2\leqslant\alpha\gamma,$$

entonces, en virtud de (2)

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b\varphi^2(x)\,dx \qquad (3)$$

o

$$\left|\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b\varphi^2(x)\,dx}. \qquad (4)$$

Para $\varphi(x)\equiv 1$ obtenemos:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

La desigualdad (3) y la (4) correspondientemente (la que, como puede demostrarse, es válido para una pareja cualquiera de funciones integrables) se designa como desigualdad de Schwarz.

7. Límites de la Integral. Introduzcamos la siguiente definición. Sea f(x) una función integrable en (a, b), $a<b$. Hagamos entonces

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0.$$

Teorema. Si a, b, c son números arbitrarios, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx \qquad (1)$$

bajo la condición de que todas las integrables existan.

Demostración. Si $a<b<c$, la relación (1) se deduce entonces -- del teorema del parágrafo 5.

Admitamos que $a<c<b$. Entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

por consiguiente

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx,$$

de donde
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Si admitimos que a = c, el teorema será evidente. En efecto, en este caso tendremos:
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 = \int_a^a f(x)\,dx$$

Razonamos en una forma análoga si b = c ó si a = b.

Observación 1. La fórmula (1) puede escribirse también de la siguiente manera:
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

Observación 2. Los números a, b que aparecen en la integral
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$
se denominan límites +) de esta integral, independientemente de que $a \leqslant b$ o de que $a > b$. El número a se llama límite inferior, y el b, límite superior.

8. Función del Límite Superior (o Inferior) de la Integral.

Si la función f(x) es integrable en $[a, b]$, y si a es un punto cualquiera del intervalo $[a, b]$, puede entonces definirse una nueva función f(x) por medio de la fórmula
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

La función F(x) es definida para cualquier x del intervalo $[a, b]$. La función F(x) es entonces una función del límite superior de la integral de la función f(x).

Análogamente puede considerarse una función del límite inferior de la integral de la función f(x), es decir, una función
$$\Phi(x) = \int_x^a f(t)\,dt.$$

Es claro que
$$\Phi(x) = -F(x).$$

Es necesario no perder de vista que la función del límite superior o inferior, depende también de la elección que se haga del punto a.

Teorema. La función
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
es continua en cualquier punto del intervalo (a,b).

+) Más exactamente, límites de la integración. (N. de la R)

Demostración. Sean x_0 y $x_0+\lambda$ puntos arbitrarios del intervalo -- (a,b), Tenemos:

$$F(x_0+\lambda)-F(x_0)=\int_a^{x_0+\lambda} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x_0+\lambda} f(t)\,dt;$$

por lo que, según el teorema del parágrafo 7

$$F(x_0+\lambda)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t)\,dt.$$

Sea f(x) una función que en $a\leq x\leq b$ satisface la desigualdad

$$|f(x)|\leq L.$$

De acuerdo con el teorema del parágrafo 6 (Pág.264) y (1) :

$$|F(x_0+\lambda)-F(x_0)|\leq L|x_0+\lambda-x_0|=L\cdot|\lambda|.$$

De donde se ve que

$$\lim_{\lambda\to 0}|F(x_0+\lambda)-F(x_0)|=0.$$

Pero esto significa que la función $\int_a^x f(t)\,dt$ es una función continua.

Observación. Es evidente que la función

$$\Phi(x)=\int_x^a f(t)\,dt$$

es también una función continua, ya que

$$\Phi(x)=-F(x).$$

Ejemplos.

1. La integral

$$F(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

es una función continua para $x>0$. Como se demostrará (ver adelante, - teorema 3 del parágrafo 9),

$$F(x)=\ln x.$$

2. Análogamente

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

es una función continua para todo x. Aquí se tendrá

$$F(x)=\operatorname{arctg} x$$

(ver adelante, teorema 3 del parágrafo 9).

3. La integral

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad (0<k<1)$$

es tambien una función continua para $0\leq x<1$. Sin embargo, no es posible evaluársele por métodos elementales. Esta función es llamada integral elíptica.

4. Puede decirse lo mismo respecto a la función

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

continua para todo x. (Para t = 0 , tomamos como valor del integrando -- igual á 1).

9. Integral Definida y Función Primitiva.

Teorema. Si la función f(x) es integrable en $[a, b]$, - $a\leq \alpha\leq b$ y $a\leq x\leq b$, existe entonces la derivada de la función $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ y es igual a la función integrando en cada punto en el que esta función sea continua..

Demostración. Sea f(x) una función continua en el punto x_0 del intervalo $[a, b]$. Entonces, escogiendo un número arbitrario $\varepsilon>0$, podremos - hallar un $\eta>0$, tal que para cada punto x del intervalo $[a, b]$, satisfaga - la desigualdad

$$|x-x_0|<\eta, \tag{1}$$

pudiendo utilizarse también la desigualdad

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

esto es

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon. \tag{2}$$

Haciendo

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt,$$

hallamos

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Por consiguiente, si x satisface la desigualdad (1), entonces, en virtud de las desigualdades (2) y del teorema del parágrafo 6

$$f(x_0)-\varepsilon<\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}<f(x_0)+\varepsilon.$$

Puesto que ε fué arbitrariamente escogido,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0),$$

es decir, $F'(x_0)$ existe y

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

De este teorema se sigue inmediatamente la siguiente proposición:

Teorema 2. La función continua f(x) en el intervalo $[a, b]$ posee en este intervalo una primitiva. Esta primitiva es la función

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C.$$

Observación. Puede demostrarse también el teorema 1 para la fun-

ción

$$\Phi(x)=\int_x^a f(t)\,dt.$$

Efectivamente, tenemos:

$$\int_x^a f(t)\,dt=-\int_a^x f(t)\,dt.$$

es necesario, sin embargo, notar que

$$\Phi'(x)=-f(x).$$

Teorema 3. Si F(x) es la función primitiva de la función f(x), continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_\alpha^x f(t)\,dt=F(x)-F(\alpha),\quad a\leqslant\alpha\leqslant b,\quad a\leqslant x\leqslant b. \qquad (3)$$

Demostración. Puesto que F(x) y $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ son las funciones primitivas de la función f(x), diferirán entre sí únicamente en una constante. Por consiguiente

$$\int_\alpha^x f(t)\,dt=F(x)+C.$$

Haciendo $x=\alpha$, obtenemos $0=F(\alpha)+C$. De aquí se sigue que $C=-F(\alpha)$, así que

$$\int_\alpha^x f(t)\,dt=F(x)-F(\alpha).$$

Observación. Haciendo $x=b$, $\alpha=a$, en la fórmula (3), obtenemos:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a).$$

La fórmula (4) nos permite calcular una integral definida si se conoce la función primitiva, es decir, si se conoce la integral indefinida.

Para abreviar, la fórmula (4) frecuentemente se escribe en otra forma:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(t)\Big|_a^b.$$

Por ejemplo,

$$\int_1^2 t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_1^2=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ejemplos.

1. Calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$.

Puesto que

$$\int \sin x\,dx=-\cos x,$$

entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1.$$

2. Calcular la integral $\int_0^1 x^n\,dx,\quad n\neq -1.$
Dado que

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

entonces

$$\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}.$$

3. Calcular la integral $\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx,\qquad a>0.$
Dado que

$$\int \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\ln(a^3+x^3),$$

entonces

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2a^3-\frac{1}{3}\ln a^3=\frac{1}{3}\ln 2.$$

4. Calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx.$
Tenemos:

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}.$$

Por consiguiente, haciendo $\operatorname{tg} x=t,\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt$, obtenemos:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx=\int t^4 dt=\frac{t^5}{5}=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5},$$

y de donde

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4}{\cos^6 x}\,dx=\frac{\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{4}}{5}-\frac{\operatorname{tg}^5 0}{5}=\frac{1}{5}.$$

5. Calcular la integral

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad (\text{ n, número natural})$$

Para la integral indefinida $\int \sin^n x\,dx$ obtuvimos (ver Pág. 212) la fórmula de reducción

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx.$$

De donde

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=-\left.\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx.$$

Si $n\geqslant 2$, el primer sumando del segundo miembro será entonces nulo y por lo tanto

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Con ayuda de esta fórmula, y teniendo en cuenta que

$$I_0=\frac{\pi}{2},\quad I_1=1,$$

fácilmente obtenemos por inducción:

$$I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ \dots\ \frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\ \dots\ \frac{2n}{2n+1}.$$

10. Teorema Integral sobre el Valor Medio. Si la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces el número

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

se llama valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Es válida la siguiente proposición:

Teorema integral del valor medio. Si la función $f(x)$ es acotada y continua en el interior del intervalo $[a, b]$, existe entonces dentro de este intervalo un punto ξ, $(a<\xi<b)$ tal que

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Hagamos para $a\leqslant x\leqslant b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

La función $F(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y de acuerdo con el parágrafo 9, posee en cualquier punto de este intervalo una derivada

$$F'(x)=f(x), \qquad a<x<b. \qquad (2)$$

Además, de acuerdo con el teorema del valor medio, estudiado en el Cálculo Diferencial, existe un punto ξ, que satisface la relación

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi), \qquad a<\xi<b. \qquad (3)$$

Ya que, de acuerdo con (1)

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt, \qquad F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0,$$

entonces, en virtud de (2) y (3)

$$\int_a^b f(t)\,dt=(b-a)f(\xi).$$

De aquí se obtiene la demostración de nuestro teorema.

Ejemplos.

1. El valor medio de la función

$$f(x)=x(1-x)$$

en el intervalo (0, 1) es igual a

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}.$$

Puesto que esta función es continua, entonces, para un cierto $x=\xi$ $(0<\xi<1)$ tendremos:

$$\xi(1-\xi)=\frac{1}{6},$$

demostrándose fácilmente lo propuesto.

2. El valor medio de la función

$$f(x)=x\sin x$$

en el intervalo $(0, \pi)$ es igual a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\,dx=1.$$

En virtud de la continuidad de esta función, tendremos por consiguiente, para un cierto ξ del intervalo $(0, \pi)$ la igualdad $\xi\sin\xi=1$. (Se demuestra fácilmente y en forma inmediata que existen cuando menos dos valores tales de ξ).

PROBLEMAS

1. Calcular las siguientes integrales definidas.

a) $\int_0^{\frac{a}{b}}\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{\pi}{4ab}$;

b) $\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+2x}}=\frac{9}{5}\sqrt{6}-\frac{64}{15}$;

c) $\int_1^2\frac{dx}{x^2+5x+4}=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$;

d) $\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;

e) $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0 \text{ para } m\neq n,\\ \pi \text{ para } m=n\end{cases}$ (m,n, enteros positivos)

f) $\int_0^1\arcsin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$;

g) $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=1$;

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2ab}$ $(a>0,\ b>0)$;

j) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

2. Demostrar que el valor medio del radio vector de la elipse

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

es igual a la mitad de su eje menor. (Como se sabe,

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

donde a, b designan los semiejes de la elipse.) Procede de aquí calcular el valor medio de la función

$$\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$.

3. Calcular el valor medio de la función

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$$

en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Comprobar directamente que este valor medio ---- $\left(=\frac{1}{6}\right)$ es el valor de la función f(x) para un cierto $x=\xi$ de este intervalo.

4. Tomando en la desigualdad

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

m y M como los valores mínimo y máximo de la función

$$f(x) = x(1-x)^2$$

en el intervalo (0,1), demostrar que

$$0 \leqslant \int_0^1 x(1-x)^2\,dx \leqslant \frac{4}{27};$$

Comprobarlo después por cálculo directo de la integral.

5. Calcular con límites de 0 á 3 la integral de la función f(x) definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{para } 1 < x \leqslant 2, \\ (2-x)^2 & \text{para } 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

y verificar directamente que la función obtenida

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es continua en el intervalo (0,3), y que su derivada en un punto cualquiera del interior de este intervalo existe y es igual a f(x).

6. Con ayuda de la fórmula (4) de la Pág.213demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4 \ldots 2n}{3\cdot 5 \ldots (2n+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

para todo número natural n .

CAPITULO XVII

TRANSFORMACION DE INTEGRALES DEFINIDAS. INTEGRACION DE SECUENCIAS Y SERIES

1. Cambio de Variables en las Integrales Definidas.

Se requiere efectuar en la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

la substitución $x=\varphi(t)$. Tiene lugar entonces la siguiente fórmula de substitución de variables en una integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

donde

$$\varphi(\alpha)=a, \qquad \varphi(\beta)=b.$$

Demostraremos esta fórmula bajo las condiciones:

1. Las funciones $\varphi(t)$ y $\varphi'(t)$ son continuas en $[\alpha, \beta]$.

2. La función f (x) es definida y continua para todo valor que la función $x=\varphi(t)$ adquiera en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

3. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Demostración. Designemos con M y m, respectivamente, los valores máximo y mínimo de la función:

$$x=\varphi(t), \qquad \alpha\leqslant t\leqslant \beta.$$

Sea

$$F(x)=\int f(x)\,dx, \qquad m\leqslant x\leqslant M.$$

De acuerdo con el teorema de la substitución en las integrales indefinidas (Pg.206), es válida, para $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, la siguiente igualdad:

$$F[\varphi(t)]=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

De donde

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

Ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{2}$$

entonces, de la comparación de las dos últimas igualdades, obtènemos la fórmula buscada.

En muchos casos, sin considerar la posibilidad de determinar la integral indefinida de una función dada, es posible calcular la integral definida dentro de ciertos límites por medio de un cambio conveniente de variables.

Observación. Si en vez de la condición 3 hubiéramos tenido la condición

$$\varphi(\beta) = a \qquad \varphi(\alpha) = b,$$

entonces, como es fácil demostrar, en lugar de la relación (1) hubiéramos obtenido

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F(a) - F(b).$$

De donde, en virtud de la relación (2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ejemplos.

1. Calcular la integral

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Hagamos

$$\sqrt{1+x^2} = t,$$

es decir,

$$x = \sqrt{t^2-1}\,.$$

Tenemos

$$t = 1 \quad \text{para} \quad x = 0,$$
$$t = \sqrt{2} \quad \text{para} \quad x = 1.$$

Puesto que

$$dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

entonces

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

2. Calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Hagamos

$$x = \operatorname{tg} t, \qquad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Los nuevos límites de integración serán, como es fácil ver, 0 y $\frac{\pi}{4}$. Así pues,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt.$$

Haciendo en la segunda integral

$$\frac{\pi}{4} - t = u, \quad dt = -du.$$

obtenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (-\ln\cos u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,du.$$

De este modo, las dos últimas integrales se anulan. Obtenemos consiguientemente

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

3. Calcular la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Tenemos:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Haciendo en la segunda integral

$$x = \pi - t,$$

$$dx = -dt,$$

obtenemos:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)} dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt.$$

Escribiendo nuevamente x en lugar de t, hallamos:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}.$$

Evaluando esta integral por un método ya conocido, obtenemos finalmente:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Problemas

Calcular las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^1 \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{32}.$

Substitución $x = \sin^3 \varphi$.

2. $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) a^3$ $\qquad (a > 0)$.

Substitución $x = a \cos \varphi$.

3. $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}.$

Substitución $x = a \operatorname{tg} \varphi$.

4. $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}.$

Substitución $x = 2a \sin^2 \varphi$.

2. Integración por Partes. Sean las funciones f (x) y $\varphi(x)$, continuas en conjunto con sus derivadas en el intervalo (a, b). Sea además,

$$F(x) = f(x)\, \varphi(x).$$

Entonces

$$F'(x)=f(x)\varphi'(x)+f'(x)\varphi(x).$$

Puesto que

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b,$$

entonces

$$\int_a^b [f(x)\varphi'(x)+f'(x)\varphi(x)]\,dx=f(x)\varphi(x)\Big|_a^b,$$

de donde

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx=f(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Ejemplos.

1. Calcular la integral

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx.$$

Haciendo en la fórmula (1)

$$f(x)=x, \qquad \varphi(x)=\sin x,$$

obtenemos:

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx=-2.$$

2. Calcular la integral

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx.$$

Haciendo

$$f(x)=x^2, \qquad \varphi(x)=-\frac{(1-x)^4}{4},$$

obtenemos:

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx=-x^2\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1+\int_0^1 2x\frac{(1-x)^4}{4}\,dx.$$

El primer sumando del segundo miembro es igual a cero. Integrando nuevamente por partes, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx=-\frac{1}{2}x\frac{(1-x)^5}{5}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)^5}{5}\,dx.$$

Vuelve a anularse el primer sumando, mientras que para el segundo tenemos

$$\frac{1}{10}\int_0^1 (1-x)^5\,dx = -\frac{1}{10}\frac{(1-x)^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \frac{1}{60}.$$

3. Integración de Secuencias y Series. Demostremos el siguiente teorema:

Teorema.1. Si la secuencia $\{u_n(x)\}$, de funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, converge uniformemente en este intervalo a la función u(x), la secuencia de funciones $\left\{\int_a^x u_n(t)\,dt\right\}$ converge entonces uniformemente en el intervalo $[a,b]$ a la función $\int_a^x u(t)\,dt$.

Demostración. De la convergencia uniforme de la secuencia $\{u_n(x)\}$ se sigue que la función u (x) es continua (págs. 151,153) y además, que para cada número $\varepsilon > 0$, es posible hallar un número N tal, que para un n cualquiera, $n > N$, tendrá lugar la desigualdad

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \text{ para } a \leqslant x \leqslant b.$$

Por lo tanto, para $n > N$, en virtud del parágrafo 6, (Pg.264),

$$\left|\int_a^x [u_n(t) - u(t)]\,dt\right| \leqslant \varepsilon(x-a) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

es decir,

$$\left|\int_a^x u_n(t)\,dt - \int_a^x u(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon(b-a) \text{ para } a \leqslant x \leqslant b.$$

Puesto que ε es un número positivo arbitrario, la última desigualdad muestra entonces que la secuencia de funciones $\left\{\int_a^x u_n(t)\,dt\right\}$ converge uniformemente a la función $\int_a^x u(t)\,dt$.

Observación. Del anterior teorema 1, para x = b, se deduce la relación

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(t)\,dt,$$

esto es, en el caso de una secuencia uniformemente convergente, el signo de integral y el signo de límite pueden intercambiarse.

Puede demostrarse un teorema análogo para las series uniformemente convergentes.

Teorema 2. Si las funciones de la secuencia $\{f_n(x)\}$ son continuas para $a \leqslant x \leqslant b$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ y tiene como suma a la función f (x), entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt$$

converge también uniformemente para $a \leqslant x \leqslant b$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

La demostración se obtiene fácilmente de la definición de convergencia uniforme de una serie y del teorema 1.

Ejemplos.

1. La secuencia $\{u_n(x)\}$, donde

$$u_n(x) = x^n,$$

converge uniformemente a la función u (x) = 0 en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ya que

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

De acuerdo con el teorema 1, tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^x u_n(t)\, dt = \int_0^x u(t)\, dt = 0$$

para $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. En efecto, la integral

$$\int_0^x u_n(t)\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

tiende uniformemente a cero para $n \to \infty$.

2. Hagamos

$$u_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Como es fácil ver, las funciones $u_n(x)$ son continuas en el intervalo $[0, 1]$ Tenemos $u_n(0) = 0$, por lo que

$$\lim_{n \to \infty} u_n(0) = 0.$$

Para $x > 0$ y $n \geqslant \frac{1}{x}$ tenemos: $u_n(x) = \frac{1}{x}$, por lo que

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \frac{1}{x}.$$

Así pues, la secuencia $\{u_n(x)\}$ converge a la función

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

para la que u (0) = 0. Esta convergencia no es uniforme, pues la función u (x) es discontinua para x = 0. Calculando la integral $\int_0^1 u_n(x)\,dx$, obtenemos:

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} u_n(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 u_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} + \ln n.$$

Vemos de esta manera, que en este caso la secuencia de integrales diverge, independientemente de que la secuencia de funciones converja. Por consiguiente, es esencial la condición de que haya convergencia uniforme en el teorema 1.

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniformemente en todo intervalo, pues

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

y la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, como se sabe (Pg.140), es convergente. Designando su suma con f (x), obtenemos en virtud del teorema 2,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nt}{n^2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

En particular, para $x=\frac{\pi}{2}$ y para $x=\pi$ obtenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots,$$

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt=0.$$

4. Integración de Series de Potencias. Sea que la serie de potencias

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

tiene un radio de convergencia R. Converge entonces esta serie para $-R<x<R$ y converge uniformemente en cada intervalo $[a, b]$, donde $-R<a<b<R$. Sea f (x) la suma de la serie (1). Según el teorema 2, tenemos:

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x a_0\,dx+\int_0^x a_1x\,dx+\int_0^x a_2x^2dx+\ldots+\int_0^x a_nx^ndx+\ldots$$
$$(-R<x<R).$$

En otras palabras

$$\int_0^x f(x)\,dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots \qquad (2)$$
$$(-R<x<R).$$

La serie (2) converge uniformemente en cada intervalo $[a, b]$, donde $-R<a<b<R$.

Observación 1. Si

$$F(x)=\int f(x)\,dx,$$

entonces

$$\int_0^x f(x)\,dx=F(x)-F(0).$$

De aquí, haciendo $F(0)=C$, obtenemos en virtud de (2):

$$F(x)=\int f(x)\,dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

Así pues, la última serie representa la integral indefinida de la función f (x) para $-R<x<R$.

Ejemplo. Integrando entre los límites de 0 a x las series de potencias conocidas (Pg.165):

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{2n}+\ldots,$$

convergentes para $|t|<1$, obtenemos las series:

$$\operatorname{arctg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$
$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

convergentes también para $|x|<1$.

Haciendo en la última serie $x=\frac{1}{2}$, encontramos:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5\cdot 2^5}+\ldots$$

Con esta serie se calcula cómodamente a π.

Observación 2. Si la función dada f (x) admite un desarrollo en serie de potencias, es posible entonces obtener la integral de esta función integrando término a término esta serie. El método indicado para obtener la integral, es particularmente cómodo cuando no sea posible evaluarla por algunos otros métodos.

Ejemplos.

1. La integral $\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx$

no puede evaluarse por medio de los métodos anteriormente descritos, ya que la función primitiva $\frac{\sin x}{x}$ no pertenece a las funciones elementales conocidas. Puede sin embargo evaluarsele fácilmente empleando un desarrollo en serie. En efecto, tenemos:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

por consiguiente, para $x\neq 0$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots$$

La serie en el segundo miembro converge (a la unidad) también para x = 0.

La función $\frac{\sin x}{x}$ no es definida para x = 0, pero tiene el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(ver Pg. 52). Por consiguiente, si en el punto x = 0 le asignamos un valor 1, obtenemos entonces la función representada por la última serie de potencias, que es discontinua para todo valor de x.

Integrando término a término, obtenemos la serie

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = (b-a) - \frac{b^3-a^3}{3\cdot 3!} + \frac{b^5-a^5}{5\cdot 5!} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots,$$

de convergencia muy rápida, por medio de la cual es fácil calcular la integral con la exactitud que se desee.
2. En la teoría del péndulo matemático se demuestra que la duración de una oscilación la da la fórmula

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

en la que l es la longitùd del péndulo, g la aceleración debida a la fuerza de gravedad y $k = \sin\frac{\alpha}{2}$, donde α es el ángulo formado por la vertical y la posición extrema del péndulo $(0 < \alpha < \pi)$.

No es posible expresar la integral del segundo miembro en términos de funciones elementales, pudiendo sin embargo calcularsela por medio de un desarrollo en serie. Substituyendo en el desarrollo de la función $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, mostrado en el ejemplo de la Pg.284, a la variable t por $k\sin\varphi$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}(k\sin\varphi)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(k\sin\varphi)^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(k\sin\varphi)^6 + \ldots$$

La serie en el segundo miembro converge uniformemente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. En efecto, el término general de esta serie satisface la desigualdad

$$\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}(k\sin\varphi)^{2n}\right| \leqslant \sin^{2n}\frac{\alpha}{2},$$

es decir, su valor modular no excede el valor modular del término general de la serie obtenida al substituir en el desarrollo de la función $\frac{1}{1-t^2}$ el valor $t = \sin\frac{\alpha}{2}$. Esta última serie converge, ya que

$$0 < \sin\frac{\alpha}{2} < 1.$$

Podemos, por consiguiente, (ver Pg. 282) integrar ambos miembros entre los límites:

$$0,\ \frac{\pi}{2}:$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi + \ldots$$

Como se sabe (ver Pg.272),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Substituyendo esta expresión en la serie obtenida, llegamos a la fórmula

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\ldots\right].$$

Calculando la suma de los n primeros términos de esta serie, podremos determinar el tiempo T con la exactitud deseada.

5. Integración y Diferenciación mediante un Parámetro. Sea K (x, t) una función definida y continua en el rectángulo

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad a'\leqslant t\leqslant b'.$$

Dado que la integral

$$\int_a^b K(x,t)\,dx$$

existe para cualquier valor de la variable t en el intervalo $[a', b']$, podremos definir en este intervalo una función f (t) haciendo

$$f(t)=\int_a^b K(x,t)\,dx. \tag{1}$$

Demostraremos que la función f (x), definida por la fórmula (1), es continua.

En efecto, si t' es un punto arbitrario del intervalo $[a', b']$, y si $\{t_n\}$ es una secuencia arbitraria de puntos de este intervalo, secuencia que converge a t', entonces, en virtud de la continuidad uniforme, la secuencia de funciones (de la variable x) $\{K(x, t_n)\}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a la función K (x, t'). Así pues, según el teorema sobre la integración de secuencias, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K(x,t_n)\,dx=\int_a^b K(x,t')\,dx,$$

de donde, en virtud de (1)

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t'),$$

esto es, la función f (x) es continua.

Demostremos ahora la siguiente proposición.

Teorema 1. Si la función K (x, t) es contínua y posee una derivada parcial respecto a t, continúa en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant t \leqslant b'$, entonces la función arbitraria

$$f(t) = \int_a^b K(x, t)\, dx$$

existe y se expresa por la fórmula

$$f'(t) = \int_a^b K'_t(x, t)\, dx \qquad (a' \leqslant t \leqslant b').$$

Demostración. sean t' y $t'+\lambda$ dos puntos arbitrarios del intervalo (a', b'). Tenemos:

$$\frac{f(t'+\lambda)-f(t')}{\lambda} = \int_a^b \frac{K(x, t'+\lambda)-K(x, t')}{\lambda}\, dx.$$

Pero, de acuerdo con el teorema sobre el valor medio

$$\frac{K(x, t'+\lambda)-K(x, t')}{\lambda} = K'_t(x, t'+\vartheta\lambda) \qquad (0<\vartheta<1),$$

por lo tanto,

$$\frac{f(t'+\lambda)-f(t')}{\lambda} = \int_a^b K'_t(x, t'+\vartheta\lambda)\, dx.$$

Si ahora λ tiende a cero, entonces, en virtud de la convergencia uniforme, la función $K'_t(x, t'+\vartheta\lambda)$ tenderá uniformemente a $K'_t(x, t')$.

Por consiguiente

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(t'+\lambda)-f(t')}{\lambda} = \int_a^b K'_t(x, t')\, dx$$

con lo que se demuestra nuestro teorema.

Teorema 2. Si la función K (x, t) es continua en el rectángulo

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a' \leqslant t \leqslant b',$$

entonces la integral de la función

$$f(s)=\int_a^b K(x, s)\,dx$$

se expresa por la fórmula

$$\int_\alpha^t f(s)\,ds=\int_a^b\left\{\int_\alpha^t K(x, s)\,ds\right\}dx \qquad (a'\leqslant\alpha\leqslant b'),$$

es decir

$$\int_\alpha^t\left\{\int_a^b K(x, s)\,dx\right\}ds=\int_a^b\left\{\int_\alpha^t K(x, s)\,ds\right\}dx.$$

Demostración. Sea

$$F(t)=\int_a^b\left\{\int_\alpha^t K(x, s)\,ds\right\}dx. \tag{1}$$

Entonces, dado que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_\alpha^t K(x, s)\,ds\right\}=K(x, t),$$

hallamos, según el teorema 1:

$$F'(t)=\int_a^b K(x, t)\,dx=f(t).$$

Por consiguiente,

$$F(t)=\int_\alpha^t f(t)\,dt+C.$$

Para determinar la constante C, hagamos $t=\alpha$; obtenemos $F(\alpha)=C$. Pero de la ecuación (1) se sigue que

$$F(\alpha)=\int_a^b\left\{\int_\alpha^\alpha K(x, s)\,ds\right\}dx=0,$$

así que C = 0 y

$$F(t)=\int_\alpha^t f(t)\,dt,$$

es decir

$$\int_\alpha^t f(s)\,ds=\int_a^b\left\{\int_\alpha^t K(x, s)\,ds\right\}dx.$$

Observación. En particular, haciendo $\alpha=a'$, $t=b'$, obtenemos:

$$\int_{a'}^{b'}\left\{\int_a^b K(x, s)\,dx\right\}ds=\int_a^b\left\{\int_{a'}^{b'} K(x, s)\,ds\right\}dx.$$

Por consiguiente, si se satisfacen las anteriores condiciones, el orden de integración no afecta el resultado.

Hasta ahora hemos supuesto que los límites de integración han sido constantes. Consideremos ahora integrales cuyos límites de integración sean funciones de la variable t.

Sean $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funciones continuas con derivadas continuas en el intervalo $[a', b']$ y sean, además tales que

$$a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, \quad a \leqslant \psi(t) \leqslant b \text{ para } a' \leqslant t \leqslant b'.$$

Supongamos que la función K (x, t) es definida y continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant t \leqslant b'$ y que posee en este rectángulo una derivada parcial continua, respecto á t.

Tiene entonces lugar la siguiente proposición.

Teorema 3. La derivada de la función

$$f(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} K(x, t)\,dx$$

existe y se expresa por la fórmula

$$f'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} K'_t(x, t)\,dx + K[\psi(t), t]\psi'(t) - K[\varphi(t), t]\varphi'(t).$$

Demostración. Hagamos

$$\int_u^v K(x, t)\,dx = F(t, u, v).$$

Tenemos, evidentemente:

$$f(t) = F[t, \varphi(t), \psi(t)].$$

De acuerdo con el teorema sobre la diferenciación de una función compuesta, obtenemos:

$$f'(t) = F'_t(t, u, v) + F'_u(t, u, v)\,u' + F'_v(t, u, v)\,v'.$$

Puesto que

$$F'_t(t, u, v) = \int_u^v K'_t(x, t)\,dx,$$
$$F'_u(t, u, v) = -K(u, t),$$
$$F'_v(t, u, v) = K(v, t),$$

entonces

$$f'(t) = \int_u^v K'_t(x, t)\,dt + K(v, t)\,v' - K(u, t)\,u'.$$

Substituyendo aquí $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, demostramos nuestro teorema.

Ejemplos.

1. Tenemos:

$$\int_1^2 x^n\,dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad (n \neq -1).$$

Derivando respecto á n, obtenemos:

$$\int_1^2 x^n \ln x\,dx = \frac{(n+1)\,2^{n+1}\ln 2 - 2^{n+1} + 1}{(n+1)^2}.$$

2. Como fácilmente se comprueba, tiene lugar la fórmula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha}} \qquad (|\alpha|<1).$$

Derivando respecto á α, obtenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\alpha\sin^2 x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4(1+\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Tenemos

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\alpha\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (|\alpha|<1)$$

Derivando respecto a α, hallamos

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{(1+\alpha\cos x)^2} = -\frac{\pi\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

integrando respecto á α desde 0 hasta t, obtenemos en el primer miembro

$$\int_0^t d\alpha \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\alpha\cos x} = \int_0^{\pi} dx \int_0^t \frac{d\alpha}{1+\alpha\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+t\cos x)}{\cos x}\,dx,$$

y en el segundo

$$\int_0^t \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha = \pi \arcsin t.$$

Finalmente, para $|t|<1$, tenemos:

$$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+t\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin t.$$

4. Haciendo

$$\int_1^2 x^n\,dx=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\qquad (n\neq -1).$$

hallamos

$$f(xy)-f(x)=\int_1^{xy}\frac{dt}{t}-\int_1^{x}\frac{dt}{t}=\int_x^{xy}\frac{dt}{t}.$$

Derivando respecto á x la última integral, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^{xy}\frac{dt}{t}=\frac{1}{xy}y-\frac{1}{x}=0.$$

Por consiguiente, esta integral no depende de x. Haciendo $x = 1$, nos damos cuenta que el valor de esta integral es $f(y)$. De donde

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

Hemos obtenido así la propiedad fundamental de la función $f(x)=\ln x$.

Problemas

1. Calcular la integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

con exactitud hasta la quinta cifra decimal, mediante el desarrollo en serie.

2. Comprobar, que integrando término a término la serie

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{k}x^k+\dots$$

y que al multiplicar después por $n+1$ ambos miembros, se obtiene una serie análoga para $(1+x)^{n+}$.

3. Integrando entre los límites 0 á x la serie de McLaurin para la función $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, se llega a la fórmula

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\dots,$$

válida para $|x|<1$.

4. Demostrar que la secuencia

$$f_n(x)=x^ne^{-nx}$$

converge a $f(x)=0$ en el intervalo $[0,1]$ no uniformemente, y que la secuencia de integrales $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ converge a la integral $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

5. Demostrar que para $|x|<1$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^{11}}{11} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^{16}}{16} + \ldots$$

6. Demostrar que para $|x|<1$

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots$$

7. Empleando el método de la diferenciación e integración mediante un parámetro, deducir nuevas integrales de las siguientes:

a) $\int_0^1 e^{ax}\,dx = \frac{e^a - 1}{a}$;

b) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}$ (ver Pg.279, problema 4)

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2} = \frac{\pi}{2ab}$ (ver Pg.274, problema 1)

d) $\int_0^{\pi} e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}(e^{-a\pi}\cos b\pi - 1)$.

8. Demostrar las siguientes fórmulas, derivando las integrales respecto a un parámetro:

a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

b) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$.

9. ¿ Para qué valores de n es posible derivar la integral $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$?

CAPITULO XVIII

INTEGRALES IMPROPIAS

En este capítulo definimos la noción de integral para aquellos casos en que la función integrando no sea definida en ciertos puntos, o cuando no sea acotada, o finalmente, cuando el intervalo de integración sea infinito.

1. Integral de una Función no Definida en ciertos Puntos. Admitamos que la función f (x) sea definida en todo el intervalo $[a, b]$, excepto en un número finito de puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Supondremos también que la función f (x) es acotada.

Definamos de una manera arbitraria la función f (x) en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Designemos por $\varphi(x)$ una nueva función definida en todo el intervalo $[a, b]$. Si la función es integrable en $[a, b]$, entonces la integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

recibirá el nombre de integral impropia de la función f (x).

Si hubiéramos definido a la función f (x) en los puntos $x_1, x_2, \ldots x_k$, en una forma distinta, hubiéramos entonces obtenido otra función $\overline{\varphi}(x)$. Pero, como es fácil ver,

$$\int_a^b [\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)]\,dx = 0,$$

pues $\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)$ es igual a cero en cualquier punto, salvo en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Así pues, si la función $\varphi(x)$ es integrable, $\overline{\varphi}(x)$ será también una función integrable y

$$\int_a^b \overline{\varphi}(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Se ve entonces de aquí, que una integral impropia no depende de la forma en que se haya definido a la función f (x) en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Designaremos a la integral impropia como lo hicimos con la integral ordinaria:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplos

1. Sea

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \text{ para } x\neq 0.$$

Si se supone que $\varphi(x)=f(x)$ **para** $x\neq 0$, **y** $\varphi(0)=0$,

entonces, como es fácil observar, la función $\varphi(x)$ tiene solamente un punto de discontinuidad: x = 0.

Por consiguiente, la función $\varphi(x)$ es integrable en cada intervalo

Resulta ahí que, por ejemplo, la integral impropia $\int_a^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ existe y es igual a la integral $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$. Análogamente, la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

posee una integral impropia en cada intervalo.

2. La función x ln x tiene una integral impropia en cualquier intervalo $0\leqslant x\leqslant a$; en efecto, es continua para $x>0$, pero dado que

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=0,$$

es acotada en este intervalo.

2. Integral de una Función no Acotada. Admitamos que la función f (x) es definida en el intervalo $[a, b]$, excepto quizá en el punto a, en cuya vecindad no es acotada la función.

Si la función f (x) es integrable en cada intervalo $[a+\varepsilon, b]$, donde $\varepsilon>0$, $a+\varepsilon<b$, y si existe el límite

$$\lim_{\varepsilon\to +0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

llamaremos entonces a este límite integral impropia:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 1. La función

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

es continua en cada punto del intervalo $[0, 1]$, excepto en el punto x = 0. Tenemos:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2-2\sqrt{\varepsilon} \qquad (\varepsilon>0),$$

por lo que

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

De esta manera, la integral impropia de la función $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[0, 1]$, es igual a 2:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Si en el intervalo $[a, b]$ existe un número finito de puntos, en cuya vecindad la función f (x) no es acotada, se divide entonces el intervalo $[a, b]$ en un número finito de intervalos, de tal suerte que únicamente en la vecindad de uno de los extremos de cada uno de ellos la función no sea acotada. Si en cada uno de estos intervalos la función posee integral impropia, a la que hemos anteriormente definido, llamaremos entonces a la suma de todos estos intervalos, integral impropia en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2. La función $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$* no es acotada en las vecindades de los puntos x = 0 y x = 1. Para investigar si existe la integral impropia en el intervalo $[0, 1]$, analicemos los límites

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{1}$$

Puesto que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x - 1),$$

los límites (1) son entonces iguales, respectivamente a:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin 0 - \arcsin(2\varepsilon - 1)] = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin(1 - 2\varepsilon) - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

3. Integral en un Intervalo Infinito. Sea la función f (x) definida para todo $x > a$. Admitamos que en cada intervalo finito $a \leq x \leq b$ es integrable la función f (x).

Si existe

* Para $(0 < x < 1)$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

llamaremos entonces a este límite integral impropia de la función f (x) en los límites de a hasta $+\infty$ y la representaremos por el símbolo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{2}$$

En este caso diremos también que la integral (2) converge. Si - el límite (1) no existe, se dice entonces que la integral (2) diverge.

Ejemplo 1. La función

$$y = \frac{1}{x^2}$$

es continua para $x > 1$. Dado que

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{b},$$

entonces

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1,$$

por lo que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Análogamente se definen las integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ejemplo 2. Sea

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to \infty} \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} (-\operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

4. Criterio de Existencia de la Integral Impropia.

I. Teorema. Sea $\varphi(x)$ una función no negativa y no acotada en la vecindad del punto a, teniendo integral impropia en el intervalo $[a, b]$ $(a<b)$. Si la función f (x), no acotada en la vecindad del punto a, es integrable en cada intervalo $[a', b]$ $(a<a'<b)$ y además

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \qquad (a<x\leqslant b),$$

entonces la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe.

Demostración. Sea $\{\varepsilon_n\}$ una secuencia arbitraria de números positivos decrecientes, que convergen a cero. Sea además

$$a+\varepsilon_n<b \qquad (a<b).$$

Formemos la serie

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_3}^{a+\varepsilon_2} \varphi(x)\,dx + \dots$$
$$\dots + \int_{a+\varepsilon_n}^{a+\varepsilon_{n-1}} \varphi(x)\,dx + \dots \qquad (1)$$

Para la suma S_n de los n primeros términos de esta serie, es válida la igualdad

$$S_n = \int_{a+\varepsilon_n}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Así pues, la serie (1) converge, y su suma es igual a la integral impropia de la función $\varphi(x)$ en $[a, b]$.

Ya que según la condición

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \qquad (a<x\leqslant b),$$

entonces

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \leqslant \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \qquad (a<\alpha<\beta\leqslant b).$$

De donde se deduce que la serie

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_3}^{a+\varepsilon_2} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{a+\varepsilon_n}^{a+\varepsilon_{n-1}} f(x)\,dx + \ldots \qquad (2)$$

es absolutamente convergente, ya que sus términos no exceden en módulo a los términos correspondientes de la serie (1).
Designemos con s_n a la suma de los n primeros términos de la serie (2), obtenemos:

$$s_n = \int_{a+\varepsilon_n}^{b} f(x)\,dx,$$

existe, por consiguiente

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^{b} f(x)\,dx.$$

Puesto que este límite existe para cada secuencia $\{\varepsilon_n\}$, que satisface las condiciones anteriormente impuestas, existe entonces

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

teniendo por lo tanto la función f (x) una integral impropia en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1. La integral $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ existe, pues $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ y la existencia de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ la hemos demostrado ya con anterioridad (ver Pg. 296)

II. Si $s<1$, entònces la integral impropia

$$\int_0^a \frac{dx}{x^s} \qquad (a>0)$$

existe.

En efecto, tenemos:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x^s} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-s}(a^{1-s} - \varepsilon^{1-s}) = \frac{a^{1-s}}{1-s}.$$

Si la función f (x) es continua en $[0, a]$, excepto en el punto x = 0, y si el producto $f(x)x^s$ es acotado en $[0, a]$ y $s<1$, entonces la integral

$$\int_0^a f(x)\,dx \qquad (3)$$

converge.

En efecto, si $|f(x)x^s| \leqslant A$, entonces

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{x^s} \qquad (0 < x \leqslant a).$$

Dado que para la función $\frac{A}{x^s}$ $(s < 1)$ existe la integral impropia en el in--

tervalo $[0, a]$, entonces, de acuerdo con el teorema anterior, existe la integral impropia (3) .

En particular, la integral (3) converge si existe el límite

$$\lim_{x \to +0} f(x)x^s. \qquad (s < 1)$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \to +0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1,$$

por consiguiente

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

existe.

III. Para las integrales con límites infinitos, puede enunciarse un teorema análogo:

Teorema. Sea $\varphi(x)$ una función no negativa y supongamos que la integral impropia.

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

existe.

Entonces, si la función f(x) es integrable en cada intervalo $[a, b]$ $(a < b)$ y para $a \leqslant x$ se satisface la desigualdad,

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x),$$

existe entonces la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

La demostración se hace en forma semejante al caso anterior.

Un criterio análogo tiene lugar para el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Ejemplo 2. La integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ existe, pues $\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$

y la función $\frac{1}{1+x^2}$ posee la integral impropia $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

IV. Si $|x^s f(x)| < A$ para $x > a > 0$ y $s > 1$,

entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existe. Se supone que la función -- f (x) es integrable en cada intervalo $[a, b]$ $(a < b)$.

En efecto, en este caso

$$|f(x)| < \frac{A}{x^s}$$

y además

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \to +\infty} [b^{-s+1} - a^{-s+1}] \frac{1}{-s+1} =$$
$$= \frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}}.$$

5. Aplicación a las series.

Teorema. Si la función f (x) es contínua, no negativa, decreciente y definida para todo $x \geq 1$, la - serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge o diverge entonces dependiendo de la convergencia o divergencia de la integral -- impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Demostración. Observemos que en el intervalo $[n, n+1]$ el valor máximo de la función f (x) será f (n) y que el mínimo será f(n+1). Por consiguiente, de acuerdo con el teorema enunciado en la Pág.274.

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por lo que

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq$$
$$\leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n). \tag{1}$$

Si existe la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$, entonces la secuencia de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es acotada, y está serie, con términos no negativos, converge.

Y a la inversa, admitamos ahora que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge. Entonces, en virtud de la segunda de las desigualdades (1), la secuencia $\left\{\int_1^n f(x)\,dx\right\}$ es acotada.

Esta secuencia no decrece, ya que

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \int_1^n f(x)\,dx,$$

pues $f(x) \geqslant 0$.

Así pues, la secuencia $\left\{\int_1^n f(x)\,dx\right\}$ converge a un cierto número g. Puesto que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para un entero cualquiera $n > N$ se cumple la desigualdad,

$$g - \varepsilon < \int_1^n f(x)\,dx < g + \varepsilon.$$

Sea ahora x un número arbitrario, mayor que N + 1. Existe entonces un entero $n > N$ tal que $n < x \leqslant n + 1$. Podemos escribir:

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^n f(t)\,dt + \int_n^x f(t)\,dt = \int_1^{n+1} f(t)\,dt - \int_x^{n+1} f(t)\,dt,$$

de donde se deduce

$$\int_1^n f(t)\,dt \leqslant \int_1^x f(t)\,dt \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt.$$

Puesto que $n > N$, entonces, a lo sumo

$$g - \varepsilon < \int_1^x f(t)\,dt < g + \varepsilon.$$

Las últimas desigualdades son válidas para cualquier $x > N + 1$.

Demostrada la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ se deduce la existencia de la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, es decir, queda demostrada la segunda parte de nuestro teorema.

Ejemplos.

1. Sea $f(x) = x^{-\alpha}$. Tenemos:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int_1^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right] & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Se ve de aqui de inmediato, que la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ existe solamente para $\alpha > 1$. Por consiguiente, de acuerdo con el último teorema, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$ (ver Pág. 148).

2. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Como es fácil ver, tenemos:

$$\int f(x)\,dx = \ln \ln x,$$

por lo que

$$\int_2^x f(t)\,dt = \ln \ln x - \ln \ln 2.$$

Así pues, la integral $\int_2^{\infty} f(t)\,dt$ no existe, deduciendose de aquí, según nuestro teorema, que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Observación. El teorema sigue siendo válido si la función f(x) es definida y posee las propiedades anteriormente enumeradas para $x \geqslant k$. Basta substituir en el teorema $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, por $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ y $\int_k^{\infty} f(x)\,dx$. respectivamente. En el ejemplo 2 empleamos ya esta propiedad.

6. Integrales impropias uniformemente Convergentes.

Sea K(x,s) una función continua, definida para $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$ poseyendo la propiedad de que la integral impropia $\int_a^{\infty} K(x,s)\,dx$ exista para cada s del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Definición. La integral impropia $\int_a^{\infty} K(x,s)\,dx$ se denomina uniformemente convergente respecto á s en el inter-

valo $[\alpha, \beta]$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $A \geqslant a$ tal que $\left|\int_c^\infty K(x, s)\,dx\right| < \varepsilon$

para cada $c > A$ y todo s del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Esta definición recuerda la definición de la convergencia uniforme de una serie de funciones. Efectivamente, las integrales impropias uniformemente convergentes poseen propiedades análogas a las de las series uniformemente convergentes. Consideramos ahora estas propiedades.

Es evidente que

$$\int_a^\infty K(x, s)\,dx = \int_a^{a+1} K(x, s)\,dx + \int_{a+1}^{a+2} K(x, s)\,dx + \ldots \tag{1}$$

La serie en el segundo miembro converge uniformemente en el intervalo $[\alpha, \beta]$, si la integral en el primer miembro converge uniformemente en este intervalo. En efecto, existe entonces para cualquier ε, $\varepsilon > 0$, un número $A \geqslant a$, tal que para cada $n > A$, $p > 0$ y para todo s del intervalo $[\alpha, \beta]$ se cumple

$$\left|\int_n^{n+1} K(x, s)\,dx + \int_{n+1}^{n+2} K(x, s)\,dx + \ldots + \int_{n+p-1}^{n+p} K(x, s)\,dx\right| = \left|\int_n^{n+p} K(x, s)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Puesto que los términos de la serie (1) son funciones contínuas del parámetro s, su suma será también una función continua de la variable s en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Integrando término a término la serie (1) respecto a s, en los límites de α a β, obtenemos una serie convergente cuya suma es igual a la integral de la función que se halla en el primer miembro de la ecuación (1), calculada entre los mismos límites:

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x, s)\,dx = \int_\alpha^\beta ds \int_a^{a+1} K(x, s)\,dx + \int_\alpha^\beta ds \int_{a+1}^{a+2} K(x, s)\,dx + \ldots$$

Variando en cada sumando del segundo miembro el orden de integración, lo que es lícito hacer, en virtud del teorema 2 (ver Pág. 288.- obtenemos:

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x, s)\,dx = \int_a^{a+1} dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\,ds + \int_{a+1}^{a+2} dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\,ds + \ldots, \tag{2}$$

es decir

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x, s)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\,ds. \tag{3}$$

Nos cercioramos ahora que la integral impropia

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, ds$$

existe. En efecto, en caso contrario, existiría una secuencia creciente de números mayores que a,

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots,$$

que tendería a $+\infty$ tal que la secuencia de integrales

$$\left\{\int_a^{k_n} dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, ds\right\}$$

sería divergente. Por consiguiente, sería divergente la serie

$$\int_a^{k_1} dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, dx + \int_{k_1}^{k_2} dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, dx + \ldots$$

Pero esta serie es convergente, ya que se obtiene, como la serie (2), al integrar la serie uniformemente convergente

$$\int_a^\infty K(x, s)\, dx = \int_a^{k_1} K(x, s)\, dx + \int_{k_1}^{k_2} K(x, s)\, dx + \ldots$$

entre los límites de α a β alterando el orden de integración. Se demuestra así la convergencia de la integral

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, ds.$$

Por lo tanto la igualdad (3) puede escribirse en la forma

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x, s)\, dx = \int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, ds. \tag{4}$$

Admitamos ahora que la función K(x,s) satisface, además de las condiciones anteriormente indicadas, las siguientes:

la. Existe la derivada $K'_s(x, s)$ y es contínua en cada punto del dominio en el cual es definida la función K(x,s):

2. La integral impropia $\int^\infty K'_s(x, s)\, dx$ converge uniformemente respecto á s en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Demostremos que en este caso, la función $\int_a^\infty K(x, s)\, dx$ posee una derivada contínua y que

$$\frac{d}{ds}\int_a^\infty K(x, s)\, dx = \int_a^\infty K'_s(x, s)\, dx.$$

En efecto, la serie

$$\int_a^\infty K'_s(x, s)\,dx = \int_a^{a+1} K'_s(x, s)\,dx + \int_{a+1}^{a+2} K'_s(x, s)\,dx + \ldots \qquad (5)$$

converge uniformemente, lo que se demuestra exactamente igual que como se hizo para la serie (1). Pero esta serie se obtiene derivando término a término la serie (1). En tal virtud, su suma, que es contínua, dada la convergencia uniforme, es de acuerdo con el teorema conocido de la teoría de series (Pág.156. igual a la derivada de la suma de la serie (1), que era lo que se quería demostrar.

En otras palabras, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 1. a) Si para la función K(x,s) definida y contínua para $x \geqslant a,\ \alpha \leqslant s \leqslant \beta$, existe la integral impropia.

$$\int_a^\infty K(x, s)\,dx$$

para cada s del intervalo $[\alpha, \beta]$ y si ésta integral converge uniformemente en este intervalo, la integral es entonces una función continua del parámetro s.

b) Bajo las mismas condiciones, existe la integral

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\,ds,$$

y se verifica la igualdad

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\,ds = \int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x, s)\,dx.$$

c) Si la función K(x,s) satisface las anteriores condiciones y además, para $x \geqslant a,\ \alpha \leqslant s \leqslant \beta$ posee una derivada continua $K'_s(x, s)$, para la cual la integral impropia

$$\int K'_s(x, s)\,dx$$

existe y converge uniformemente, entonces la integral

$$\int_a^\infty K(x, s)\,dx$$

posee en el intervalo $[\alpha, \beta]$ una derivada continua respecto á s, la cual se expresa mediante la fórmula

$$\frac{d}{ds}\int_a^\infty K(x, s)\,dx = \int_a^\infty K'_s(x, s)\,dx,$$

Para establecer la convergencia uniforme de una integral impropia muchas veces basta con aplicar el siguiente teorema:

Teorema 2. Si la función $\varphi(x, s)$ es continua y no negativa en el dominio $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$ y si existe para ella la integral impropia de convergencia uniforme

$$\int_a^\infty \varphi(x, s)\, dx,$$

entonces, para cada función K(x,s) que satisface la desigualdad

$$|K(x, s)| \leqslant \varphi(x, s)$$

y sea continua en ese mismo dominio, la integral impropia

$$\int_a^\infty K(x, s)\, dx$$

existe, y converge uniformemente.

Demostración. La existencia de la integral $\int_a^\infty K(x, s)\, dx$ para todo s del intervalo $[\alpha, \beta]$ se deduce del teorema enunciado en la Pág.300 que para cada s tenemos:

$$|K(x, s)| \leqslant \varphi(x, s) \qquad (x \geqslant a)$$

y, además, para todo s existe la integral

$$\int_a^\infty \varphi(x, s)\, dx.$$

En virtud de la convergencia uniforme de la integral

$$\int_a^\infty \varphi(x, s)\, dx$$

para cada $\varepsilon > 0$ se halla un número $A \geqslant a$, tal que

$$\int_c^\infty \varphi(x, s)\, dx < \varepsilon$$

para todo $c > A$ y para cada s del intervalo$[\alpha, \beta]$.Puesto que para todo $d > c$. se tendrá

$$\left|\int_c^d K(x, s)\, dx\right| \leqslant \int_c^d |K(x, s)|\, dx \leqslant \int_c^d \varphi(x, s)\, dx,$$

entonces, asímismo

$$\left|\int_{c}^{\infty} K(x, s)\, ds\right| \leqslant \int_{c}^{\infty} \varphi(x, s)\, dx < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la integral $\int_{a}^{\infty} K(x, s)\, dx$ converge uniformemente en $[\alpha, \beta]$.

Observación. Si, en particular, la función $\varphi(x, s)$ no depende de s y la integral

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

existe. Es evidente entonces, que esta integral puede considerarse como uniformemente convergente. En las aplicaciones, es este el caso que con más frecuencia se encuentra.

Ejemplos.

1. La integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin sx\, dx$$

converge uniformemente respecto al parámetro s en cualquier intervalo.

En efecto, tenemos:

$$|e^{-x} \sin sx| \leqslant e^{-x},$$

y la integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx,$$

como es fácil ver, existe efectivamente $\int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$,

por lo que

$$\int_{0}^{a} e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a}.$$

Pasando el límite, obtenemos

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 1.$$

Dado que la integral $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx$ no depende en lo absoluto del parámetro s, converge entonces uniformemente respecto a este parámetro en cualquier intervalo. De acuerdo con el teorema 2, esto mismo puede decirse respecto a la integral impropia propuesta. Por consiguiente, es una función contínua del parámetro s.

Para determinar esta función, notemos que

$$\int e^{-x} \sin sx\, dx = -\frac{e^{-x}(\sin sx + s\cos sx)}{1+s^2},$$

por lo que

$$\int_0^a e^{-x}\sin sx\,dx=\frac{s}{1+s^2}-\frac{e^{-a}(\sin sa+s\cos sa)}{1+s^2}.$$

Cuando s crece ilimitadamente, como es fácil ver, el segundo término del segundo miembro tiende entonces a cero.

Obtenemos de esta manera:

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin sx\,dx=\frac{s}{1+s^2}.$$

Integrando ambos miembros respecto á s entre los límites de 0 á y, no perdiendo de vista la convergencia uniforme de nuestra integral, obtenemos:

$$\int_0^y ds\int_0^\infty e^{-x}\sin sx\,dx=\int_0^\infty dx\int_0^y e^{-x}\sin sx\,ds=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

Derivando nuestra integral respecto á s, obtenemos:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\cos sx\,dx.$$

Puesto que $|xe^{-x}\cos sx|\leqslant xe^{-x}$ y como fácilmente se ve, existe la integral $\int_0^\infty xe^{-x}dx$, la integral obtenida por derivación converge entonces -- uniformemente y, por consiguiente,

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-x}\sin sx\,dx=\int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-x}\sin sx)\,dx=$$

$$=\int_0^\infty xe^{-x}\cos sx\,dx=\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{1+s^2}\right)=\frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}.$$

2. La integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2}$$

converge uniformemente respecto á s en cada intervalo $[\alpha,\beta]$ para $1\leqslant \alpha<\beta$. En efecto, en ese intervalo, se tiene la desigualdad

$$\frac{1}{x^2+s^2}\leqslant\frac{1}{x^2+1},$$

y la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$$

existe y no depende del parámetro s. Se deduce de aquí en una forma análoga al ejemplo anterior, la convergencia uniforme de la integral y su continuidad en $[\alpha,\beta]$.

Es fácil evaluar esta integral, si tomamos en cuenta que

$$\int \frac{dx}{x^2+s^2} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{x}{s},$$

así que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{x}{s} = \frac{\pi}{2s}.$$

Integrando entre los límites 1 á y, obtenemos

$$\int_1^y ds \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2} = \int_0^\infty dx \int_1^y \frac{ds}{x^2+s^2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx,$$

por consiguiente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln y.$$

Derivando la integral dada, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{-2s}{(x^2+s^2)^2} dx.$$

Esta integral converge también uniformemente en $[\alpha, \beta]$, ya que

$$\left| \frac{-2s}{(x^2+s^2)^2} \right| < \frac{2\beta}{(x^2+1)^2},$$

y la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

existe, como fácilmente se demuestra

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{-2s}{(x^2+s^2)^2} dx = -\frac{\pi}{2s^2},$$

es decir

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+s^2)^2} = \frac{\pi}{4s^3}.$$

Debe procederse en una forma análoga en la solución de los problemas que a continuación se proponen sobre la derivación e integración de integrales impropias .

PROBLEMAS

1. Evaluar las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \quad (a > 0);$

b) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad (a > 0);$

c) $\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0);$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x},$

e) $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$

demostrar que no existen (d, e)

f) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$

g) $\int_0^{a} \frac{x^5 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{8}{15}a^5 \quad (a > 0)$

(emplear la substitución $x = a\sin\varphi$).

2. Demostrar la existencia de las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1};$

b) $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

(consideramos que para x = 0, la función integrando es igual a 1.)

c) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1+\varepsilon}}\,dx \quad (\varepsilon > 0).$

3. Demostrar que las siguientes integrales no existen:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + x^2} \quad (a > 0);$

b) $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ (para x=0, la función integrando, es por definición,- igual a la unidad)

c) $\int_1^{\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx.$

4. Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\alpha} n}$ converge para cualquier $\alpha > 0$.

5. Demostrar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right]$.

6. Obtener nuevas integrales de la), b) por diferenciación e integración.

7. Derivando la integral

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$$

respecto á a é introduciendo en la integral obtenida la nueva variable - $y = \frac{a}{x}$, demostrar que $I'(a) = -2I$, es decir, que

$$\frac{I'(a)}{I(a)} = -2.$$

Integrando ambos miembros, tenemos: $\ln I(a) = -2a + C$, $I(a) = C'e^{-2a}$.

Haciendo a=0, obtenemos:

$$C' = I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{e} \quad I(a) = e^{-2a} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

8. Demostrar la convergencia uniforme de las integrales:

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$ para $a \geqslant 1$;

b) $\int_0^{\infty} e^{-ax} x \cos x \, dx = \frac{a^2 - 1}{(a^2 + 1)^2}$ para $a \geqslant 1$.

CAPITULO XIX

APLICACION DEL CALCULO INTEGRAL

1. Cálculo de un Area. Determinamos anteriormente el área de la región limitada por la curva contínua $y=f(x)$, por las rectas $x=a$, $x=b$ y por el eje OX, como la integral de la función $f(x)$ en el intervalo (a,b), bajo la condición $f(x)\geqslant 0$.

Nos proponemos ahora determinar el área de la región limitada por las rectas $x=a$, $x=b$ y por las dos curvas continuas $y=f(x)$, $y=g(x)$, bajo la condición de que $f(x)\leqslant g(x)$. A saber, la evaluamos como la integral

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.$$

Puede fundamentarse esta evaluación intuitivamente de la siguiente manera:

Si ambas funciones son no negativas, entonces (Fig. 47) el área mostrada es igual a la diferencia entre el área de la región limitada por la curva $y=g(x)$, por las rectas $x=a$, $x=b$ y por el eje OX y el área limitada por la curva $y=f(x)$, por las rectas $x=a$, $x=b$ y por el eje OX. Por lo tanto, nuestra área es igual a

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx.$$

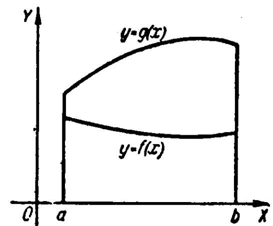


Fig. 47

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen signo arbitrario, entonces, en virtud de su acotamiento, existe una constante c, tal, que las funciones

$$f_1(x)=f(x)+c,\quad g_1(x)=g(x)+c$$

serán siempre no negativas. El área de la región comprendida entre las curvas $y=f_1(x)$, $y=g_1(x)$ y las rectas $x=a$, $x=b$, coincide evidentemente con el área anterior, siendo igual a

$$\int_a^b [g_1(x)-f_1(x)]\,dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.$$

Ejemplos.

1. Evaluar el área P de un cuadrante de la elipse. El cuadrante de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

está limitado por las rectas $x=0$, $x=a$, el eje OX y la curva $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Por consiguiente,

$$P=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

de donde $P=\frac{\pi ab}{4}$. Así pues, el área de la elipse es igual a πab.

2. Evaluar el área) de la región limitada por las rectas x=a, x=b $(0\leqslant a<b)$ y la parábola $y^2=2px$.

Tenemos aquí:

$$f(x)=-\sqrt{2px},\quad g(x)=+\sqrt{2px},$$

por lo que

$$P=\int_a^b 2\sqrt{2px}\,dx=\frac{4}{3}\sqrt{2p}\,(b^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}).$$

Haciendo $a=0,\ b=x,\ \sqrt{2px}=y$, obtenemos la fromula conocida para el área del segmento de la parábola

$$P=\frac{4}{3}xy.$$

PROBLEMAS

Evaluar las siguientes áreas:

1. El área de la región limitada por la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y la recta $x=c$ $(c>a)$:

$$P=\frac{b}{a}\left[c\sqrt{c^2-a^2}-a^2\ln\frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{a}\right].$$

2. El área de la región limitada por el eje OX, la recta x=1 y la curva:

a) $y=x\sqrt{1-x^2}$, $P=\frac{1}{3}$;

b) $y=\sqrt{1-x^2}$, $P=\frac{\pi}{4}$.

3. El área de la región limitada por las curvas $y=\sin^2 x$, $y=\cos^2 x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ y el eje OX.

$$\left(P=\frac{5}{6}\sqrt{2}-\frac{2}{3}.\right)$$

4. Demostrar que si las funciones $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ contínuan en el intervalo $[a,b]$ poseen la propiedad de que sus correspondientes curvas tengan únicamente un número finito de puntos comunes, el área de la región limitada por estas curvas y por las rectas x=a, x=b se expresará entonces por la integral

$$P=\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

5. Basándose en la conocida fórmula para el área del sector circular demostrar (en forma análoga a como se hizo en la Pág.256que el área - del sector limitado por las rectas $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ y la curva $r=f(\varphi)$, $f(\varphi)$ designando una función continua y no negativa en el intervalo $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$ y $f(\varphi_1)=r_1$, $f(\varphi_2)=r_2$ (en coordenadas polares), se expresa por la integral

$$P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

6. Aplicando la fórmula del problema 5, evaluar el área de
a) El lemniscato

$$r^2=a^2\cos 2\varphi \quad \left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant+\frac{\pi}{4}\right), \quad P=a^2;$$

b) El folium de Descartes

$$r=a\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} \quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$
$$P=\frac{a^2}{6}.$$

7. Evaluar el área de la región limitada por los ejes coordenados y- la curva

$$y=\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0, \ b>0).$$

2. Cálculo de la Longitud de un Arco. Admitamos que - las funciones son definidas, continuas y que poseen derivadas contínuas- en el intervalo $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. El conjunto de todos los puntos del espacio cu-- yas coordenadas sean (x, y, z), correspondientes a uno y al mismo valor de la variable t, determinen una cierta curva.

La variable t se llama Parámetro y la Función (1) es la Expresión Paramétrica de esta curva.

Formemos una cortadura arbitraria δ del segmento $[\alpha, \beta]$.

Sean los puntos $\alpha<t_1<t_2<\ldots<\beta$ **los puntos de esta cortadura** Designamos como $A, A_1, A_2, \ldots, B$ (Fig. 48) los puntos de la curva correspondientes a los valores $\alpha, t_1, t_2, \ldots, \beta$. del parámetro.

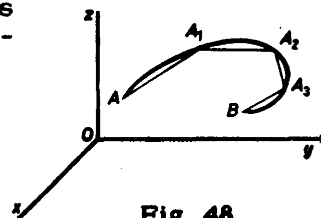


Fig. 48

Hagamos

$$\Delta x_1=f(t_1)-f(\alpha),$$
$$\Delta x_2=f(t_2)-f(t_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Determinemos análogamente $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta z_1, \Delta z_2, \ldots$

Dado que la longitud de la cuerda AA_1 se expresa por la fórmula

$$AA_1=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta y_1^2+\Delta z_1^2},$$

entonces la longitud de la línea quebrada $AA_1A_2\ldots$ se expresará por la -- fórmula

$$L = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2} + \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 + \Delta z_2^2} + \dots \tag{2}$$

De acuerdo con el teorema sobre el valor medio,

$$\Delta x_1 = f'(\xi_1)\,\Delta t_1 \quad (\alpha < \xi_1 < t_1).$$

Así pues, si se hace

$$f'^2(\xi_1) = f'^2(t_1) + \rho_1,$$

entonces

$$(\Delta x_1)^2 = f'^2(t_1)\,\Delta t_1^2 + \rho_1 \Delta t_1^2.$$

Procediendo en forma análoga para Δy_1, Δz_1, obtenemos:

$$\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2} =$$
$$= \sqrt{[f'^2(t_1) + \varphi'^2(t_1) + \psi'^2(t_1)]\,\Delta t_1^2 + (\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1)\,\Delta t_1^2}.$$

Haciendo

$$\sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = F(t)$$

y empleando las desigualdades

$$\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leqslant \sqrt{|a+b|} \leqslant \sqrt{|a|} + \sqrt{|b|},$$

obtenemos:

$$F(t_1)\,\Delta t_1 - \sqrt{|\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1|}\cdot \Delta t_1 \leqslant \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2} \leqslant$$
$$\leqslant F(t_1)\,\Delta t_1 + \sqrt{|\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1|}\cdot \Delta t_1. \tag{3}$$

Procediendo en forma semejante para Δx_2, Δy_2, Δz_2, ... y haciendo

$$P = F(t_1)\,\Delta t_1 + F(t_2)\,\Delta t_2 + \dots,$$
$$R = \sqrt{|\rho_1 + \sigma_1 + \tau_1|}\,\Delta t_1 + \sqrt{|\rho_2 + \sigma_2 + \tau_2|}\,\Delta t_2 + \dots, \tag{4}$$

obtenemos en virtud de (2) y (3) las desigualdades

$$P - R \leqslant L \leqslant P + R. \tag{5}$$

Designemos con $\bar{\rho}$ al mayor de los números $\rho_1, \rho_2, \dots$ Determinemos análogamente a $\bar{\sigma}$ y $\bar{\tau}$. De la fórmula (4) se obtiene facilmente

$$|R| \leqslant \sqrt{\bar{\rho} + \bar{\sigma} + \bar{\tau}}\,(\beta - \alpha). \tag{6}$$

Escojamos una secuencia arbitraria normalizada de cortaduras

$$\{\delta_n\}.$$

Para las cortaduras δ_n, del mismo modo que antes, determinemos los números P_n, R_n, L_n, $\bar{\rho}_n$, $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\tau}_n$. De la misma manera que para **las fórmulas** (5) y (6), tendremos:

$$P_n - R_n \leqslant L_n \leqslant P_n + R_n, \quad |R_n| \leqslant \sqrt{\bar{\rho}_n + \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n}\,(\beta - \alpha). \tag{7}$$

De la continuidad uniforme de las funciones $f'^2(t)$, $\varphi'^2(t)$, $\psi'^2(t)$ considerando (3), se deduce

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\rho}_n = 0, \lim_{n\to\infty} \bar{\sigma}_n = 0, \lim_{n\to\infty} \bar{\tau}_n = 0.$$

Entonces, de acuerdo con (7)

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Pero, como es fácil ver

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \int_\alpha^\beta F(t)\,dt;$$

Por lo que, en virtud de (7), la secuencia $\{L_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_\alpha^\beta F(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

La longitud de la curva dada se denomina límite de la secuencia $\{L_n\}$; designando la longitud de la curva con s, obtenemos finalmente

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

Observación 1. Si las funciones $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ poseen en el intervalo $[\alpha; \beta]$ derivadas a continuas a ambos lados excepto en un número finito de puntos de este intervalo, y si la integral existe (en el sentido or-

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

dinario o en el impropio), su valor se denomina también longitud de la curva dada. Es posible demostrar que para cada secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ la secuencia de números $\{L_n\}$, determinados como anteriormente, converge a esta integral.

Observación 2. Es frecuente que una curva se de por las fórmulas

$$y = \alpha(x), \quad z = \beta(x),$$

poseyendo las funciones $\alpha(x)$, $\beta(x)$ derivadas continuas en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Esta representación de la curva puede considerarse como del tipo paramétrico, lo que inmediatamente se ve si se escribe

$$x = t, \ y = \alpha(t), \ z = \beta(t) \qquad (x_1 \leqslant t \leqslant x_2).$$

En este caso

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\alpha'^2(x)+\beta'^2(x)}\,dx.$$

En particular, para curvas planas, $(\beta(x)\equiv 0)$ obtenemos la fórmula usada con frecuencia

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Ejemplos.

1. Calcular la longitud del arco de la parábola $y^2=2px$ desde el vértice hasta el punto K (x, y).

Puede obtenerse una representación paramétrica haciendo

$$x=\frac{t^2}{2p},\quad y=t.$$

De donde

$$s=\int_0^y\sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt=\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

2. Calcular la longitud de arco de cicloide $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ entre los límites de t_1 a t_2.

Tenemos:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=2a\int_{t_1}^{t_2}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\left(\cos\frac{t_1}{2}-\cos\frac{t_2}{2}\right)\quad(0\leq t_1\leq t_2\leq 2\pi).$$

En particular, haciendo $t_1=0$, $t_2=2\pi$, encontramos que la longitud de la cicloide es 8a.

PROBLEMAS

Calcular la longitud de los arcos de las siguientes curvas:

1. De la cicloide

$$x=2r\sin^2 t,\ y=2r\sin^2 t\,\mathrm{tg}\,t$$

entre los límites de cero á t.

$$\left(s=2r\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2 t}}{\cos t}-\sqrt{3}\ln(\sqrt{3}\cos t+\sqrt{1+3\cos^2 t})-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})\right]\right).$$

2. De la curva

$$x=t^2,\ y=t-\frac{1}{2}t^3$$

entre los límites de 0 á $\sqrt{3}$

$$(s=2\sqrt{3}).$$

3. De la catenaria

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

entre los límites de x_1 a x_2.

$$\left[s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}}-e^{-\frac{x_2}{a}}\right)-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right)\right].$$

4. De la curva

$$y=\frac{x^2}{2a},\ z=\frac{x^3}{6a^2}$$

entre los límites de 0 á x.

$$(s=x+z).$$

5. De la curva determinada por la intersección del cilindro parabólico

$$(y+z)^2=4ax$$

con el cono elíptico

$$\frac{4}{3}x^2+y^2-z^2=0,$$

entre el origen de coordenadas y el punto (x, y, z).

$$(s=z\sqrt{2}).$$

Sugestión. Tomar á x en calidad de parámetro.

3. Volumen de un Cuerpo de Revolución. Sea $y=f(x)$ -- una función continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$ $(a>b)$. Desig-- nemos con D la región limitada por la curva $y=f(x)$, el eje OX y las rectas $x=a$, $x=b$. Supongamos ahora que la curva $y=f(x)$ realiza una rotación completa alrededor del eje OX y que la región D describe en virtud de - este giro un cierto cuerpo T. Evaluemos el volumen de este cuerpo.

Para el efecto, formemos una cortadura arbitraria δ del segmento $[a, b]$ y designemos, respectivamente, con $M_1, m_1, M_2, m_2, \ldots$ los valores - máximos y mínimos de la función f(x) en los diferentes segmentos de la - cortadura δ. Observemos que los rectángulos cuyas bases son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ y cuyas alturas son $M_1, M_2, \ldots,$ respectivamente, cubren totalmente a la- región D. Por consiguiente, el cuerpo formado por la rotación completa - de estos rectángulos, contiene el cuerpo T. El volumen de este cuerpo, -- que contiene el T, se expresa por la fórmula

$$W=\pi(\Delta x_1M_1^2+\Delta x_2M_2^2+\ldots).$$

Análogamente, los rectángulos con bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ y alturas $m_1, m_2, \ldots$ están totalmente comprendidos en la región D, y por consiguiente, el cuerpo que ellos describen queda contenido en el cuerpo T. (Fig. 49).

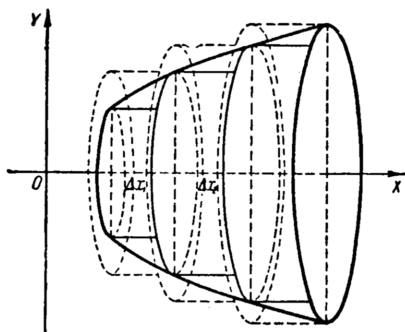


Fig. 49

Designando con w al volumen del cuerpo contenido en T, obtenemos:

$$w = \pi(\Delta x_1 m_1^2 + \Delta x_2 m_2^2 + \ldots).$$

Si $\{\delta_n\}$ denota una secuencia arbitraria normalizada de cortaduras del intervalo $[a, b]$, entonces, como es fácil observar,

$$\lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} w_n = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Por lo tanto, de acuerdo con las representaciones intuitivas, determinamos el volumen del sólido de revolución por medio de la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Ejemplos.

1. Calcular el volumen de una esfera de radio r.

La esfera se obtiene al girar el semicírculo

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leqslant x \leqslant r)$$

alrededor del eje OX. Por consiguiente,

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

lo que coincide con la fórmula conocida.

2. Evaluar el volumen del cuerpo formado por la rotación de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

alrededor del eje OX.

Cuando t varía de 0 a 2π, crece entonces x de 0 a $2\pi a$, pues

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) > 0 \text{ для } 0 < t < 2\pi.$$

Por lo tanto, y es una función de la variable x en el intervalo $[0, 2\pi a]$, así que

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\,dx.$$

Introduciendo la variable t, obtenemos:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} [a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t)\,dt = 5\pi^2 a^3.$$

PROBLEMAS

Calcular los volúmenes de los siguientes cuerpos de revolución.

1. Calcular el volumen del toroide formado al girar el arco de la circunferencia

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

alrededor del eje OX entre los límites de x_1 a $x_2 (-r \leq x_1 < x_2 \leq r)$

$$\left(V=\pi\left[r^2(x_2-x_1)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\right]\right).$$

2. Del cono truncado (fórmula conocida en la Geometría elemental)
3. Del cuerpo obtenido al girar el arco de astroide

$$x=r\cos^3 t,\quad y=r\sin^3 t \quad \left(0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

alrededor del eje OX. $\left(V=\frac{16}{105}\pi r^3\right)$.

4. Del cuerpo obtenido al girar la curva

$$y^2(x-4a)=ax(x-3a) \qquad (0\leq x\leq 3a)$$

alrededor del eje OX.

$$\left(V=\frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2)\right).$$

5. Del cuerpo obtenido al girar la curva

$$(y^2-b^2)^2=a^3x$$

alrededor del eje $OY (-b\leq y\leq b)$.

$$\left(V=\frac{256}{315}\frac{\pi b^9}{a^6}\right).$$

Sugestión. El volumen se expresa aquí por la fórmula $\pi\int_{-b}^{+b}x^2\,dy$.

4. Area de una Superficie de Revolución. Sean la función $y=f(x)$ y su primera derivada contínuas y no negativas en el intervalo $[a, b] (a<b)$. Supongamos que la curva C, gráfica de la función f(x), describe al realizar una rotación completa alrededor del eje OX la superficie W. Se trata de determinar el área de la superficie W. Tomemos una cortadura arbitraria δ del segmento $[a, b]$ y designemos como $a<x_1<x_2<\cdots$ a los puntos de esta cortadura. Sean A_1, A_2, ... puntos de la curva C correspondientes a los puntos $x_1, x_2, \cdots$

Al girar alrededor del eje OX, la línea quebrada $AA_1A_2\ldots B$, describe una superficie, formada por las superficies laterales de los conos truncados (Fig. 50). El área de esta superficie se expresa por la fórmula

$$P=2\pi\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta y_1^2}\,\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+2\pi\sqrt{\Delta x_2^2+\Delta y_2^2}\,\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots,$$

donde

$$\Delta y_1=f(x_1)-f(a),\ \Delta y_2=f(x_2)-f(x_1),\ \ldots,$$

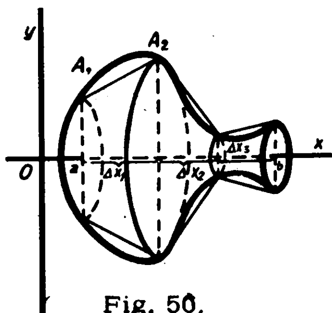


Fig. 50.

De acuerdo con el teorema sobre el valor medio, tenemos:

$$\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta y_1^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2}\Delta x_1=\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\,\Delta x_1,$$

donde ξ_1 es un número comprendido entre a y x_1.

Suponiendo que

$$\varepsilon_1=\frac{f(a)+f(x_1)}{2}-f(\xi_1),$$

encontramos

$$|\varepsilon_1|\leqslant\frac{1}{2}[|f(\xi_1)-f(a)|+|f(\xi_1)-f(x_1)|].$$

Así que,

$$P=S+R,$$

donde

$$S=2\pi\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}f(\xi_1)\Delta x_1+2\pi\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots,$$
$$R=2\pi\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\varepsilon_1\Delta x_1+2\pi\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\varepsilon_2\Delta x_2+\ldots$$

Designando con η al mayor de los números $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots,$ y con M al valor máximo de $|f'(x)|$ en (a, b), obtenemos:

$$|R|\leqslant 2\pi\sqrt{1+M^2}(b-a)\eta.$$

Si escogemos ahora una secuencia arbitraria normalizada $\{\delta_n\}$ de cortaduras y determinamos los números $P_n, R_n, S_n, \eta_n,$ del mismo modo como se determinaron los $P, R, S, \eta,$ obtendremos entonces:

$$P_n=S_n+R_n.$$

Se observa fácilmente que

$$\lim_{n\to\infty}S_n=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

De la continuidad uniforme de la función f(x) en el intervalo $[a, b]$ se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n=0,$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Entonces, intuitivamente, determinamos el área de la superficie de revolución por medio de la fórmula

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{1}$$

Observación. Admitamos que la función f(x) continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$ posea en este intervalo una derivada continua, con exclusión de un número finito de puntos del intervalo y que existe la integral (en sentido ordinario o impropio)

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Puede demostrarse que bajo estas condiciones, $\lim_{n\to\infty} P_n$ también existe y que es igual a la integral arriba indicada, multiplicada por 2π. En este caso, el área de la superficie de revolución se determina por la fórmula (1).

Ejemplos.

1. Calcular el área de una esfera de radio r. Tenemos aquí:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (-r \leqslant x \leqslant r),$$
$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

así que

$$A = 2\pi \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{+r} r\,dx = 4\pi r^2.$$

2. Evaluar el área de la superficie obtenida al girar la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

alrededor del eje OX (ver Pág.320).

Introduciendo la variable t, obtenemos:

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{1 + \left[\frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)}\right]^2}\,a(1 - \cos t)\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

PROBLEMAS

Calcular las áreas de las siguientes superficies de revolución:

1. Del paraboloide de revolución, obtenido al girar la parábola alrededor del eje OX entre los límites 0 y x: $y^2 = 2px$

$$A = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

2. Del elipsoide de revolución, obtenido al girar la elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b):$$

a) alrededor del eje OX

$$A=2\pi\left[b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right];$$

b) alrededor del eje OX

$$A=2\pi\left[a^2+\frac{ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right].$$

En el caso b), el área de la superficie está dada por la fórmula

$$A=2\pi\int_{-b}^{+b}x^2\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

3. Del casquete esférico, obtenido al girar el círculo

$$x^2+y^2-2rx=0$$

alrededor del eje OX entre los límites O y h:

$$A=2\pi rh.$$

4. Del toroide, obtenido al girar el círculo de radio r alrededor de una recta contenida en el plano del círculo, a una distancia $a>r$ del centro de éste. Calcular también el volumen de este toroide:

$$A=4\pi^2ar, \quad V=2\pi^2ar^2.$$

CAPITULO XX

LA INTEGRAL DOBLE. CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD

$$z=f(x, y)$$

1. Definición de la Integral Doble sobre un Rectángulo. Sea una función definida y acotada en el rectángulo D, determinado mediante las desigualdades $a\leqslant x\leqslant b, a'\leqslant y\leqslant b'$ (Fig. 51).

Partamos el rectángulo D en un número arbitrario de rectángulos (no necesariamente iguales) cuyas áreas sean $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ *). Designemos con (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ..., (ξ_n, η_n) las coordenadas de los puntos arbitrariamente escogidos, uno para cada rectángulo.

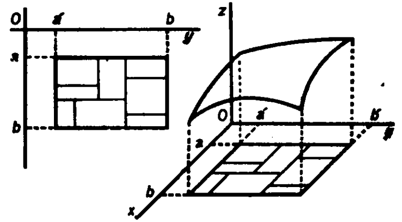


Fig. 51

Formemos la suma

$$A=f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1+$$
$$+f(\xi_2, \eta_2)\Delta\sigma_2+\dots+f(\xi_n, \eta_n)\Delta\sigma_n.$$

Es fácil ver que si en el rectángulo D la función $f(x,y)>0$, entonces la suma A representa la suma de los paralelepípedos rectos cuyas bases son $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, y sus alturas $f(\xi_1, \eta_1)$, $f(\xi_2, \eta_2)$,

Llamaremos cortadura δ. al conjunto de rectángulos y con $|\delta|$ designaremos la longitud de la mayor de las diagonales de los rectángulos $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, de la cortadura δ

Llamaremos normal a la secuencia de cortaduras $\{\delta_n\}$ si

$$\lim_{n\to\infty}|\delta_n|=0.$$

Definición. Si para una secuencia normal cualquiera de cortaduras $\{\delta_n\}$ la secuencia correspondiente de las sumas $\{A_n\}$ es convergente (independentemente de la elección de los puntos (ξ, η)), se dice entonces que la función es integrable en el rectángulo D.

Puede demostrarse (como en el caso de una función de una variable, Pág.256) que si la función es integrable, entonces para una secuencia normal cualquiera de cortaduras la correspondiente secuencia de sumar $\{A_n\}$ tiende a uno y al mismo límite. Este límite común se denomina integral doble de la función f(x,y) en el dominio rectangular D.

+) En lo que sigue, denota el autor con $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, tanto los propios rectángulos como los dominios (N. de la R.)

La integral doble se denota por el símbolo

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma \quad \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Observación.1. Si la función z=f(x,y) es continua y no-negativa en el rectángulo D, el volumen del dominio limitado por la superficie a=f(x,y), por el plano coordenado OXY y por los plano que pasan por los lados del rectángulo D paralelamente el eje OZ, se determinará entonces como el valor de la integral

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

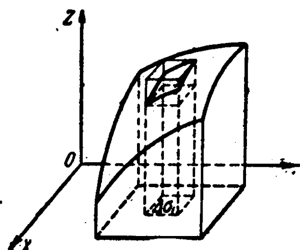


Fig. 52

(Posteriormente se demostrará que cualquier función, continua en un rectángulo, es integrable en él.)

Esta determinación intuitiva del volumen de un dominio puede fundamentarse. Designemos con M_1, M_2, ...; m_1, m_2,..., los valores máximos y mínimos de la función f(x, y) en los rectángulos de la cortadura δ, respectivamente, y con (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), y $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)$, $(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)$, ... correspondientemente, los puntos en los que la función toma estos valores

$$S = f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots = M_1\Delta\sigma_1 + M_2\Delta\sigma_2 + \ldots,$$
$$s = f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)\Delta\sigma_1 + f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)\Delta\sigma_2 + \ldots = m_1\Delta\sigma_1 + m_2\Delta\sigma_2 + \ldots$$

Los paralelepípedos rectos correspondientes a la suma S llenan en su totalidad al dominio considerado, mientras que los paralelepípedos rectos, correspondientes a la suma s se hallan todos en este dominio (Fig. 52). Ya que para una secuencia normal arbitraria de cortaduras $\{\delta_n\}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \iint_D f(x, y)\,d\sigma,$$

la determinación del volumen del dominio dado como el valor de la integral arriba indicada concuerda totalmente con nuestras representaciones intuitivas.

Observación 2. En que integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ en lugar de x, y, puede escribirse otras dos letras cualesquiera; así por ejemplo

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(u, v)\,du\,dv = \iint_D f(w, t)\,dw\,dt.$$

Ejemplos.

1. La función z = c es integrable en un rectángulo cualquiera y

$$\iint_D c\,d\sigma = c\,|D|$$

$|D|$ denota el área del rectángulo D).

En efecto, tomando una cortadura arbitraria δ y escogiendo los puntos (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ..arbitrariamente, uno en cada rectángulo de los que

constituyen la cortadura $\gamma \delta_i$ vemos, que

$$f(\xi_1, \eta_1)=c, \quad f(\xi_2, \eta_2)=c, \ldots,$$

por consiguiente

$$A=c\Delta\sigma_1+c\Delta\sigma_2+\ldots=c|D|.$$

Pero, por definición

$$\iint_D c\,d\sigma=c|D|.$$

Geométricamente, la función z=c representa un plano paralelo al -coordenado OXY. Si $c>0$, la integral (1) representará el volumen del paralelepípedo recto cuya base es D y su altura c

2. Calcular la integral soble $\iint y\,dx\,dy$ en el cuadrado D con vértices en (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)

La función $f(x,y)=y$ es continua, y en base en lo aseverado, integrable.Para calcular esta integral, partamos nuestro cuadrado en cuadrados iguales mediante rectas paralelas a los ejes de coordenadas. En cada uno de llos, como punto (ξ_1, η_1) tomaremos el vértice superior derecho. Puesto que el área de cada cuadrado es igual a $\frac{1}{n^2}$, obtendremos - entonces para la suma $\sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ el valor $\frac{1}{n^2}\sum \eta_i$. Dado que los números η_i tiene los valores $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, y cada uno de estos valores se halla en n cuadrados, que forman una faja horizontal, la suma condiderada - tendrá entonces el valor

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right)n=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Pasando al límite para $n\to\infty$,obtenemos

$$\iint_D y\,dx\,dy=\frac{1}{2}.$$

Este resultado puede obtenerse por un método elemental. Basta observar que la integral considerada, representa el volumen del prisma - recto, cuya base es el triángulo rectángulo isósceles de lados unitarios y altura unitaria.

2. Condiciones de Integrabilidad.

Teorema. 1. La suma de dos funciones $f(x, y)$ y $\varphi(x,y)$ integrables en un rectángulo D, es también integrable en este rectángulo y

$$\iint_D [f(x, y)+\varphi(x, y)]\,d\sigma=\iint_D f(x, y)\,d\sigma+\iint_D \varphi(x, y)\,d\sigma.$$

Teorema2. El producto de una constante por una - función f(x,y) integrable en un rectángulo D, es también integrable, y

$$\iint_D cf(x, y)\,d\sigma=c\iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

Estos teoremas se siguen de inmediato de la definición de integral doble; se demustran como los correspondientes del Capítulo XVI (Pág.264

Teorema 3.- La función z = f (x,y) continua en el rectangulo D. es integrable en este rectángulo.

La demostración de este teorema se hace en forma análoga a la del correspondiente teorema para una función de una variable (Capítulo XVI, Pág.262). Para el efecto, definamos el concepto de suma superior S y suma inferior s, correspondientes a la cortadura δ, en una forma similar a como se hizo para la integral definida ordinaria. Así

$$S=M_1\Delta\sigma_1+M_2\Delta\sigma_2+\ldots,\quad s=m_1\Delta\sigma_1+m_2\Delta\sigma_2+\ldots,$$

donde $M_1, M_2, \ldots$ y $m_1, m_2, \ldots$ son los valores máximos y mínimos de la función f (x, y) en los rectángulos $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ respectivamente.

Puede demostrarse que para toda secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ es válida la relación

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0$$

y que además, para dos cortaduras cualesquiera δ y δ' se tendrá siempre

$$S\geqslant s'.$$

Puede el lector fácilmente demostrar estas propiedades haciendo las subtituciones obvias correspondientes en las demostraciones de los lemas 1 y 2 (Cap. XVI Págs260,262. En base a las propiedades (1) y (2) demostramos nuestro teorema en forma análoga al teorema de la Pág.262 casi sin modificaciones.

Un teorema más general es el siguiente:

Teorema.4. Una función, definida y acotada en un rectángulo D, será integrable en este rectángulo si todos sus puntos de discontinuidad. se localizan en un número finito de curvas que sean las representaciones gráficas de funciones continuas (de la forma $y=\varphi(x)$ o $x=\phi(y)$).).

Omitimos la demostración de este teorema.

Ejemplo. Sea f (x, y) una función definida en el rectángulo D con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(0, 1)$ de la siguiente manera:

$$f(x, y)=\begin{cases}-1 \text{ para } & 0\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{y arbitraria } y,\\ 2 \text{ para } & 1< x\leqslant 3 \quad \text{y arbitraria } y.\end{cases}$$

Como es fácil ver, esta función es acotada y continua en cualquier punto, excepto los puntos del segmento de recta x = 1 que e halla en el rectángulo dado. En virtud del teorema 4 la función f (x, y) es integrable en este rectángulo.

3.La integral doble como Reiteración. Veamos ahora un teorema que nos permitirá calcular una integral doble por medio de integrales ordinarias .

Teorema.Si la función f (x, y) es continua en el rectángulo D ($(a\leqslant x\leqslant b,\ a'\leqslant y\leqslant b')$,) entonces

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\int_a^b\left\{\int_{a'}^{b'} f(x, y)\,dy\right\}dx=\int_{a'}^{b'}\left\{\int_a^b f(x, y)\,dx\right\}dy.$$

Demostración. Formemos las cortaduras arbitrarias δ' y δ'' del intervalo $[a, b]$ por medio de los segmentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots,$ y del intervalo $[a', b']$ por los segmentos $\Delta y_1, \Delta y_2,$ respectivamente.

Sean $a = x_1 < x_2 < \ldots,$ y $a' = y_1 < y_2 < \ldots,$ respectivamente los extremos de los segmentos de las cortaduras δ' y δ''. En los puntos de separación de δ' y δ'' tracemos rectas paralelas al eje OY y al OX, respectivamente (Fig. 53). Obtenemos de este modo la cortadura δ del rectángulo D en una serie de rectángulos. Sea $\Delta\sigma_{ik}$ aquel rectángulo de la cortadura δ, cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son Δx_i, y Δy_k, respectivamente. Designemos finalmente con m_{ik}, M_{ik}, los valores mínimos y máximos de la función f (x, y(en el rectángulo $\Delta\sigma_{ik}$. Hagamos

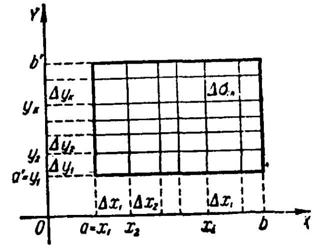


Fig. 53

$$F(x) = \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy.$$

Escojamos los puntos arbitrarios $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ en los segmentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ respectivamente, y sea

$$A = F(\xi_1)\Delta x_1 + F(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots$$

En virtud de (1)

$$F(\xi_1) = \int_{a'}^{b'} f(\xi_1, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_1, y)\, dy + \int_{y_2}^{y_3} f(\xi_1, y)\, dy + \ldots$$

Dado que

$$m_{11} \leqslant f(\xi_1, y) \leqslant M_{11}$$

para $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, entonces

$$m_{11}\Delta y_1 \leqslant \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_1, y)\, dy \leqslant M_{11}\Delta y_{11}.$$

Análogamente

$$m_{12}\Delta y_1 \leqslant \int_{y_2}^{y_3} f(\xi_1, y)\, dy \leqslant M_{12}\Delta y_2$$

y así sucesivamente.

Por lo que, de acuerdo con (3), hallamos

$$m_{11}\Delta y_1 + m_{12}\Delta y_2 + \ldots \leqslant F(\xi_1) \leqslant M_{11}\Delta y_1 + M_{12}\Delta y_2 + \ldots$$

Procediendo análogamente, encontramos además

$$m_{21}\Delta y_1 + m_{22}\Delta y_2 + \ldots \leqslant F(\xi_2) \leqslant M_{21}\Delta y_1 + M_{22}\Delta y_2 + \ldots$$

y así sucesivamente.

Puesto que $\Delta\sigma_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k$, entonces en base a (2), hallamos

$$m_{11}\Delta\sigma_{11} + m_{12}\Delta\sigma_{12} + \ldots + m_{21}\Delta\sigma_{21} + m_{22}\Delta\sigma_{22} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant A \leqslant M_{11}\Delta\sigma_{11} + M_{12}\Delta\sigma_{12} + \ldots + M_{21}\Delta\sigma_{21} + M_{22}\Delta\sigma_{22} + \ldots$$

Designando con S y S el miembro izquierdo y derecho respectivamente en la cadena última de desigualdades, obtenemos:

$$s \leqslant A \leqslant S.$$

Si construimos ahora dos secuencias normales de cortaduras $\{\delta'_n\}$ y $\{\delta''_n\}$ de los segmentos $[a, b]$ y $[a', b']$, la correspondiente secuencia de cortaduras $\{\delta_n\}$ del rectángulo D será también una secuencia normal.

De acuerdo con las desigualdades (4), tenemos

$$s_n \leqslant A_n \leqslant S_n.$$

Ya que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim S_n = \iint_D f(x, y)\, d\sigma$$

entonces, en virtud de (5), para casa secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ existe el $\lim A_n$; ; entonces de acuerdo con (2) la función F (x, y) es integrable en el intervalo $[a, b]$ y

$$\int_a^b F(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} A_n = \iint_D f(x, y)\, d\sigma.$$

De donde, en virtud de (1)

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Análogamente puede obtenerse

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \int_{a'}^{b'} \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

Observación. Es posible demostrar un teorema aún más general. Admitamos que la función f (x, y) es integrable en el rectángulo D y que para cada x la función f (x, y), considerada como función de la variable y, es integrable. Bajo estas condiciones puede afirmarse que

1) La función $F(x) = \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy$ es integrable en $[a, b]$;

2) $$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Ejemplos.

1.Calcular $\iint_D x^2 y\, dx\, dy$ en el rectángulo D, limitado por las rectas $x=2,\ x=5,\ y=1,\ y=3$. Tenemos aquí:

$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy = \int_1^3 dy \int_2^5 x^2 y\, dx =$$

$$= \int_1^3 dy \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_{x=2}^{x=5} = \frac{1}{3}\int_1^3 (125y - 8y)\, dy = \frac{117}{3}\frac{y^2}{2}\Big|_1^3 = 156.$$

Es posible también integrar en un orden inverso:

$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy = \int_2^5 dx \int_1^3 x^2 y\, dy =$$

$$= \int_2^5 dx \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{1}{2}\int_2^5 (9x^2 - x^2)\, dx = 4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = 156.$$

2. Demostrar que

$$\iint_D f(x)\varphi(y)\,dx\,dy=\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_c^d \varphi(y)\,dy\right],$$

donde $f(x)$, $\varphi(y)$ son funciones continuas en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente, evaluándose la integral doble en el rectángulo D limitado por las rectas

$$x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d.$$

Aquí tenemos

$$\iint_D f(x)\varphi(y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x)\varphi(y)\,dy.$$

Puesto que al integrar respecto a x se considera y como constante, se tendrá

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\int_{a'}\left\{\int_a f(x, y)\,dx\right\}dy$$

así que

$$\iint_D f(x)\varphi(y)\,dx\,dy=\int_a^b f(x)\,dx\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

Ya que $\int_c^d \varphi(y)\,dy$ es constante, podrá sacarsele del signo de integración $\int_a^b$, después de lo cual obtenemos el resultado querido.

Puede emplearse esta fórmula en el ejemplo 1.

3. Si la función f (x,y) es definida y acotada en el rectángulo D $(a\leq x\leq b,\ a'\leq y\leq b')$ y se anula en todos los puntos de este rectángulo, excepto en aquéllos situados en un número finito de curvas de la forma $y=\varphi(x)$ o $x=\phi(y)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Puesto que como puntos de discontinuidad solo pueden ser como es fácil ver, los puntos de las curvas arriba citadas, esta función será entonces integrable en el rectángulo D (teorema 4, Pág.328) Desginemos con $f_1(x, y)$ una función igual a la f (x, y) en todo el rectángulo D, excepto en aquellos puntox localizados en curvas de la forma $x=\phi(y)$, en los que la igualaremos a cero, y hagamos

$$(4)\quad f_2(x, y)=f(x, y)-f_1(x, y).$$

Las funciones $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son integrables por la misma razón que lo es la función f (x, y). Ya que

$$f(x, y)=f_1(x, y)+f_2(x, y),$$

entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy+\iint_D f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

Evidentemente bastará convencerse que ambas integrales en el segundo miembro son iguales a cero!

Para la primera integral, en virtud del teorema mostrado, tenemos

$$\iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f_1(x, y)\,dy.$$

Si la función $f_1(x, y)$ se hace $x = x_0$, esa función se transforma en una función de la variable y, nula para todos los valores de y, excepto para un número finito de ellas, que corresponden a los puntos de intersección de la recta $x = x_0$ con las curvas que anteriormente se han excluido. Por consiguiente, (ver Pág. 259).

$$\int_{a'}^{b'} f_1(x_0, y)\,dy = 0$$

para todo x_0, de donde de inmediato se colige que la primera integral en el miembro derecho es igual a cero.

Para la función $f_2(x, y)$ la demostración es análoga.

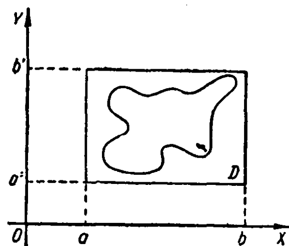


Fig. 54

4.- La Doble Integral en un Dominio. Sea ω un dominio cerrado acotado (ver Pág. 167). Sea $z = f(x, y)$ una función definida y acotada en el dominio ω y sea D $(a \leq x \leq b,\ a' \leq y \leq b')$ un rectángulo arbitrario, que contiene en su interior al dominio ω (ver Pág. 54). Definamos en el rectángulo D una nueva función $F(x, y)$ de la siguiente manera:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{para puntos (x,y) contenidos en } \omega \\ 0 & \text{para los puntos restantes del rectángulo D} \end{cases}$$

Diremos que la función $f(x, y)$ es integrable en el dominio ω, si la función $F(x, y)$ lo es en el rectangulo D. Llamaremos integral doble de la función $f(x, y)$ en el dominio ω al valor de la integral $\iint_D F(x, y)\,d\sigma$.

Designaremos, como antes, a la integral doble en el dominio ω con el símbolo $\iint_\omega f(x, y)\,d\sigma$, o con $\iint_\omega f(x, y)\,dx\,dy$.

Así pues, por definición

$$\iint_\omega f(x, y)\,d\sigma = \iint_D F(x, y)\,d\sigma.$$

Observación. Si substituimos al rectángulo D por otro D', que contenga también al dominio ω, obtendremos al mismo valor de la integral. Es fácil demostrar esto en el caso en que el rectángulo D se halle completamente en D'. Si no es así, bastará tomar un tercer rectángulo D'' que contenga a los D y D'. Las integrales en D y D' serán iguales a la integral en D'', por lo que serán iguales entre sí.

Definición. Un dominio cerrado ω se llama **regular** si esta limitado por un número finito de curvas, representables en la forma $y = \varphi(x)$ o $x = \phi(y)$.

Teorema 1. La función $f(x, y)$, acotada y continua en un dominio regular ω es integrable en este dominio.

Demostración. Tomemos un rectángulo cualquiera D, que contenga al dominio ω, y definamos, como antes la función $F(x, y)$ Es fácil ver que todos los puntos de discontinuidad de esta función se encuentran en la frontera del dominio ω Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 4, (pág. 328). la función $F(x, y)$ es integrable.

Ejemplos.

1. Un polígono cerrado es un dominio regular. En efecto, su frontera está formada por un número finito de segmentos que son las gráficas de funciones continuas del tipo $y=ax+b$ o $x=c$.

2. El dominio cerrado limitado por una elipse es también regular. Si por ejemplo la elipse está dada por la ecuación $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ la frontera de nuestro dominio estará entonces, formada por dos curvas:

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{y} \quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

donde $-a \leqslant x \leqslant a$.

3. Si un dominio regular ω esta constituido por un número finito de dominios regulares $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, de los cuales no hay un solo par con un punto interior común, entonces como es fácil ver, el propio dominio ω es regular. En efecto, la frontera del dominio ω está formada por un número finito de curvas continuas de la forma $y=\varphi(x)$ y $x=\phi(y)$ cada una de las cuales se halla en la frontera de los dominios $\omega_1, \ldots, \omega_k$ El dominio ω se denomina suma de los dominios $\omega_1, \ldots, \omega_k$.

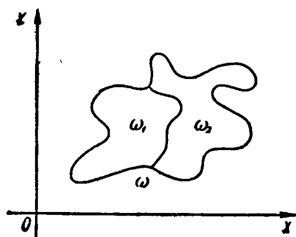


Fig. 55

Teorema 2. Si una función f(x,y) continua en el dominio ω es la suma de dos dominios regulares ω_1 y ω_2 -- (sin puntos interiores comunes Fig. 55), entonces

$$\iint_{\omega} f(x, y)\,d\sigma=\iint_{\omega_1} f(x, y)\,d\sigma+\iint_{\omega_2} f(x, y)\,d\sigma.$$

Demostración. Tomemos un rectángulo cualquiera D que englobe al dominio ω Designemos con $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ las correspondientes funciones, definidas en el rectángulo D y construidas como se construyó la función f (x, y) (Pág. 331) en los dominios $\omega, \omega_1, \omega_2$ Tenemos por consiguiente

$$\iint_{\omega} f(x, y)\,d\sigma=\iint_{D} F(x, y)\,d\sigma; \qquad \iint_{\omega_1} f(x, y)\,d\sigma=\iint_{D} F_1(x, y)\,d\sigma;$$

$$\iint_{\omega_2} f(x, y)\,d\sigma=\iint_{D} F_2(x, y)\,d\sigma. \tag{1}$$

Observemos que la función $\varphi(x, y)=F(x, y)-F_1(x, y)-F_2(x, y)$ (2)

es nula dondequiera, excepto quizá en los puntos que se encuentran en la parte común de los dominios ω_1 y ω_2 En vista de la regularidad de los dominios ω, ω_1 y ω_2 obtenemos (ver Pág. 331 ejemplo 3):

$$\iint_D \varphi(x, y)\, d\sigma = 0.$$

De donde, considerando las igualdades (1) y (2), demostramos nuestro teorema.

Observación 1. El teorema 1 permite calcular el área de un dominio regular cualquiera ω Designando esta área con el símbolo $|\omega|$ obtenemos, por definición

$$|\omega| = \iint_\omega d\sigma.$$

Existe la integral en el miembro derecho, ya que la función $f(x, y) = 1$, es evidentemente continua en todo dominio cerrado $|\omega$ Si el dominio $|\omega|$ es un rectángulo, obtenemos entonces para su área el mismo valor que en la definioión usual (ver Pág. 326 Ejemplo 1).

Observación 2. Si la función $f(x, y)$ es continua y no negativa en un dominio regular ω entonces los puntos (x, y, z), para los que (x, y) se halle en el dominio ω y z satisfaga las desigualdades $0 \leq z \leq f(x, y)$, determinarán un cuerpo cuyo volumen definamos por la fórmula

$$V = \iint_\omega f(x, y)\, d\sigma.$$

Como anteriormente (Pág. 326), es fácil convencerse que la definición anterior concuerda con el concepto intuitivo de volumen.

Ejemplos.

4. Apliquemos el teorema 2 en la evaluación de la integral de la función $f(x, y)$, definida en el ejemplo de la Pág. 331. La recta $x = 1$ divide al rectàngulo D en dos rectángulos que no poseen puntos interiores comunes. Designando con D_1 al rectángulo de la izquierda y con D_2 al de la derecha, obtenemos:

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma =$$
$$= \iint_{D_1} (-1)\, d\sigma + \iint_{D_2} 2 d\sigma = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3.$$

5. Designemos con ω un polígono cualquiera cerrado y partámoslo arbitrariamente en un número finito de polígonos $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Hagamos $f(x, y) = c_k$ dentro de ω_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes cualesquiera. En las fronteras de los polígonos definimos una función en forma arbitraria, solo imponiéndole la condición de que sea acotada.

De acuerdo con el teorema 4 (Pág. 331), la función $f(x, y)$ es integrable el el polígono $|\omega|$ Finalmente, el teorema 2 hace posible evaluar esta integral:

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{\omega_1} c_1 d\sigma + \iint_{\omega_2} c_2 d\sigma + \ldots + \iint_{\omega_n} c_n d\sigma =$$
$$= c_1 |\omega_1| + c_2 |\omega_2| + \ldots + c_n |\omega_n|.$$

5. Condiciones de integrabilidad. Teorema sobre el valor medio. Para las funciones integrables en un dominio ω regular arbitrario, son válidos teoremas análogos a los del Par. 2 (Pag. 328):

Teorema 1. La suma de dos funciones $f(x,y)$ y $\varphi(x,y)$, integrables en un dominio regular ω, es también integrable en este dominio y

$$\iint_{\omega} [f(x, y) + \varphi(x, y)]\, d\sigma = \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{\omega} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

Teorema 2. El producto de una constante C por una función $f(x, y)$, integrable en un dominio regular ω, también es integrable en este dominio y

$$\iint_{\omega} cf(x, y)\, d\sigma = c \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma.$$

El teorema 3 del parágrafo 2 corresponde al 1 del 4.

Las demostraciones de estos teoremas se obtienen fácilmente empleando la definición de la doble integral en un dominio regular y los teoremas mencionados del parágrafo 2.

Observación. Si las funciones $f(x,y)$ y $\varphi(x,y)$ son integrables en un dominio regular ω y satisfacen en él la desigualdad $f(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$, entonces

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint_{\omega} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

En efecto, de acuerdo con el teorema 1, la última desigualdad es equivalente a la desigualdad.

$$\iint_{\omega} [\varphi(x, y) - f(x, y)]\, d\sigma \geqslant 0.$$

De la difinición misma de la doble integral, se deduce de inmediato que la integral de una función no negativa es no negativa.

Para una función de dos variables tiene lugar el teorema sobre el valor medio, análogo al teorema anteriormente demostrado sobre el valor medio para el caso de una función de una variable (Pag.265):

Teorema 3. Si la función $f(x,y)$ es integrable en un dominio cerrado ω, y si satisface en él las desigualdades

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

entonces

$$m|\omega| \leqslant \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma \leqslant M|\omega|.$$

En efecto, de las condiciones del teorema y de la última observación, se desprende que

$$\iint_{\omega} m\, d\sigma \leqslant \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint_{\omega} M\, d\sigma,$$

y en virtud del teorema 2 y de la definición de área de un dominio, tenemos:

$$\iint_{\omega} m\, d\sigma = m|\omega| \quad \text{y} \quad \iint_{\omega} M\, d\sigma = M|\omega|.$$

Observación. En forma análoga a la definición de la Pag. 272 para una función de una variable, como valor medio de la función $f(x,y)$, integrable en el dominio ω, entenderemos el número

$$\frac{1}{|\omega|}\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma.$$

6. Integral Doble en un Dominio como Reiteración. - Admitamos que el dominio regular ω esté definido por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

donde $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \quad \text{para} \quad a < x < b$$

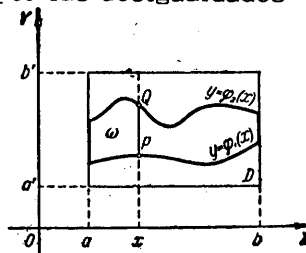


Fig. 56

(Fig. 56). Llamaremos normal (respecto al eje OX) a un dominio en estas condiciones.

Sea D un rectángulo cualquiera, determinado por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$ y que comprenda al dominio ω.

Si la función $f(x,y)$ es contínua en el dominio ω, entonces, como se sabe

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D} F(x, y)\, d\sigma,$$

donde

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{en los puntos de dominio } \omega; \\ 0 & \text{en los demás puntos del rectángulo} \end{cases}$$

Si la x es constante, la función F(x,y), considerada como función solo de la variable y, tendrá no más de dos puntos de discontinuidad.

Estos pueden ser solo los puntos P y Q en los que la recta trazada desde el punto x en el eje OX paralelamente al eje OY, intersecta la frontera del dominio ω. Así pues, para cada x existe la integral

$$\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy.$$

De aquí que, de acuerdo con la observación de la Pag.330), se deduce que

$$\iint_D F(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy \right\} dx.$$

Tomando una x arbitraria y haciendo $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, obtenemos:

$$\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy = \int_{a'}^{y_1} F(x, y)\, dy + \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy + \int_{y_2}^{b'} F(x, y)\, dy.$$

Dado que $F(x, y) = 0$ para $a' \leqslant y < y_1$ y para $y_2 < y \leqslant b'$, entonces

$$\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy.$$

Observemos además que para $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ tendremos $F(x, y) = f(x, y)$. Por lo tanto,

$$\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

De donde, en virtud de (1) y (2), obtenemos finalmente.

$$\iint_\omega f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx. \qquad (3)$$

Observación. Puede hacerse un razonamiento análogo para un dominio normal respecto al eje OY, definido por las desigualdades

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \qquad c \leqslant y \leqslant d$$

En este caso tenemos

$$\iint_\omega f(x, y)\, d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy. \qquad (4)$$

Si es posible dividir al dominio ω en un número finito de dominios normales $\omega_1, \omega_2, \ldots$, entonces

$$\iint_\omega f(x, y)\, d\sigma = \iint_{\omega_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{\omega_2} f(x, y)\, d\sigma + \ldots$$

Para el cálculo de las integrales en los dominios $\omega_1, \omega_2, \ldots$, basta emplear las fórmulas (3) y (4).

Ejemplos:

1. Evaluar la doble integral de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2,$$

tomada en el triángulo D limitado por los ejes de coordenadas y por la recta $y = -x + 1$.

Como es fácil ver, este triángulo es un dominio normal definido por las desigualdades

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x.$$

Por consiguiente

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 1 - x.$$

obtenemos

$$\iint_D (x^2 + xy + 2y^2)\, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 2y^2)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(1 - x) + x\frac{(1 - x)^2}{2} + 2\frac{(1 - x)^3}{3} \right] dx = \frac{7}{24}.$$

Nuestro triángulo puede también definirse por las desigualdades:

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 - y.$$

Al lector le será fácil verificar que la integral

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 + xy + 2y^2)\, dx$$

tiene el mismo valor que el anteriormente calculado.

2. Calcular la integral $\iint_\omega (2x + 3y + 1)\, dx\, dy$ en un dominio limitado por un triángulo con vértices(-1,-1), (2,-4) y (1,3). Encontrar además el valor medio del integrando en este triángulo.

Establezcamos en primer lugar, por el método conocido, las ecuaciones de las rectas que forman los lados del triángulo (las ecuaciones se muestran en la Fig. 57). En seguida, por medio de la recta x=1, dividimos el triángulo en dos dominios normales ω_1 y ω_2 . Hubiera podido utilizarse la recta y= -1). Como ya sabemos,

$$\iint_\omega (2x + 3y + 1)\, dx\, dy = \iint_{\omega} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy + \iint_{\omega_2} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy.$$

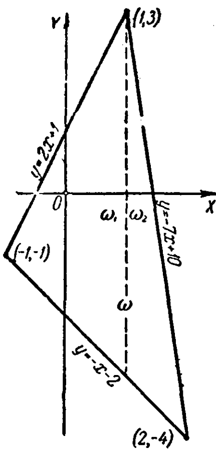


Fig.57

Puesto que los dominios ω_1 y ω_2 son normales, cada una de las integrales del segundo miembro puede evaluarse como el producto de dos integrales, obteniéndose

$$\iint_{\omega_1}(2x+3y+1)\,dx\,dy=$$
$$=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-x-2}^{2x+1}(2x+3y+1)\,dy=$$
$$=\int_{-1}^{+1}\left[2xy+\frac{3}{2}y^2+y\right]_{y=-x-2}^{y=2x+1}dx=\int_{-1}^{+1}\left(\frac{21}{2}x^2+9x-\frac{3}{2}\right)dx=4.$$

Análogamente

$$\iint_{\omega_2}(2x+3y+1)\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_{-x-2}^{-7x+10}(2x+3y+1)\,dy=$$
$$=\int_1^2\left[2xy+\frac{3}{2}y^2+y\right]_{y=-x-2}^{y=-7x+10}=\int_1^2(60x^2-198x+156)\,dx=-1.$$

y por último

$$\iint_{\omega}(2x+3y+1)\,dx\,dy=3.$$

Para encontrar el valor medio de la función $2x+3y+1$ en el triángulo mostrado, hay que dividir el valor obtenido para la integral entre el área del triángulo, la que como es fácil ver, es igual a 9. Obtenemos así 1/3 como valor medio.

3. Calcular el área del dominio ω, limitado por la parábola $y^2=2x$ y la cuerda que une los puntos (2,-2) y (8,4) (Fig. 58).

La recta x= 2 divide al dominio ω en dos dominios normales: el dominio ω_1, definido por las desigualdades:

$$0\leqslant x\leqslant 2,\quad -\sqrt{2x}\leqslant y\leqslant +\sqrt{2x},$$

y el ω_2, definido por

$$2\leqslant x\leqslant 8,\ x-4\leqslant y\leqslant\sqrt{2x}.$$

Así pues

$$\iint_{\omega}dx\,dy=\iint_{\omega_1}dx\,dy+\iint_{\omega_2}dx\,dy=$$
$$=\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}dy+\int_2^8 dx\int_{x-4}^{\sqrt{2x}}dy=\int_0^2 2\sqrt{2x}\,dx+\int_2^8(\sqrt{2x}-x+4)\,dx=18.$$

Puede calcularse el área del dominio ω por otro método.

En efecto, pueden considerarse este dominio como normal y definido por las desigualdades

$$-2 \leqslant y \leqslant 4, \quad \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant y+4.$$

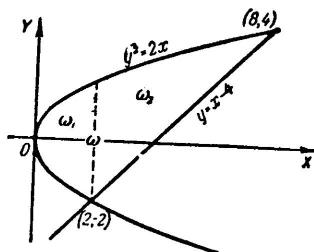


Fig. 58

Por lo tanto

$$\iint_{\omega} dx\,dy = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dx =$$

$$= \int_{-2}^{+4} \left(y+4-\frac{y^2}{2}\right) dy = 18.$$

4. Calcular el area del dominio normal ω, definido por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x),$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$ son funciones contínuas en el intervalo $[a, b]$, para las que se cumple la desigualdad $f_1(x) < f_2(x)$, siendo $a < x < b$ (ver Pag.313)

Tenemos aquí:

$$|\omega| = \iint_{\omega} d\sigma = \int_{a}^{b} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy.$$

Pero

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy = f_2(x) - f_1(x).$$

Por consiguiente

$$|\omega| = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$

5. Calcular el volumen de la esfera

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

El plano OXY corta a esta esfera según el círculo

$$x^2+y^2=r^2,$$

cuya interioridad, incluyendo las fronteras, designaremos con ω. Como fácilmente se ve, el hemisferio situado arriba del plano OXY, es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) tales que el punto (x,y) se localice en el dominio ω, y z satisfaga la desigualdad:

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

En virtud de nuestra definición de volúmen (Pag.334, obtenemos para - el volumen buscado de toda la esfera

$$V = 2 \iint_{\omega} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma = 2 \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy.$$

Al integrar respecto á y, deberá tomarse á x como constante. Es posible introducir una nueva variable φ con la substitución

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin \varphi, \quad dy = \sqrt{r^2 - x^2} \cos \varphi\, d\varphi.$$

Entonces

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (r^2 - x^2) \cos^2 \varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} (r^2 - x^2).$$

Por lo tanto

$$V = 2 \int_{-r}^{+r} \frac{\pi}{2} (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

6. Calcular el volumen de la parte común de dos cilindros circulares de igual radio, cuyos ejes se cortan perpendicularmente. Tomemos los - ejes de estos cilindros como ejes coordenados OZ y OY

Sus ecuaciones podrán entonces escribirse

$$x^2 + y^2 = r^2 \ , \ x^2 + z^2 = r^2.$$

La parte común de estos cilindros se define, como se sabe, por las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2, \ x^2 + z^2 \leqslant r^2.$$

Dado que no es fácil representar o bosquejar esta región, se razonará de la siguiente manera:

Este dominio es simétrico respecto al plano OXY. Bastará entonces - calcular el volumen de su mitad superior, definida por las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2, \ x^2 + z^2 \leqslant r^2, \ z \geqslant 0.$$

Designemos con (x_0, y_0) un cierto sistema de números que satisfagan a la primera de estas desigualdades. Para que el punto (x_0, y_0, z) se localice en la mitad superior considerada, será necesario y suficiente que $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{r^2 - x_0^2}$. Por consiguiente, esta mitad superior coincide con el con-

junto de todos los puntos (x,y,z) tales que (x,y) se encuentre en el círculo

$x^2+y^2=r^2$, y z satisfaga las condiciones anteriores. Designando con ω la interioridad del círculo $x^2+y^2=r^2$ incluyendo su frontera, obtendremos para el volumen de toda la parte común de nuestros cilindros, la integral

$$V=2\iint_{\omega}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\,dy=$$
$$=2\int_{-r}^{+r}dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dy=2\int_{-r}^{+r}2(r^2-x^2)\,dx=$$
$$=4\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{+r}=\frac{16}{3}r^3.$$

PROBLEMAS

1. Calcular las integrales dobles siguientes:

a) $\iint\cos^2 y\,d\sigma$ en el cuadrado $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y<\frac{\pi}{2}$.
Respuesta $\frac{\pi^2}{16}$.

b) $\iint\sqrt{4+x+y}\,d\sigma$ en un dominio normal definido por las desigualdades $0\leqslant y\leqslant 5$, $0\leqslant x\leqslant 5-y$.
Respuesta $\frac{56}{15}$.

c) $\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ en un dominio normal definido por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant a$, $\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}$.
Respuesta $\frac{2}{9}a^3$.

d) $\iint\sqrt{\cos^2 y+x^2\sin^2 y}\,d\sigma$ en el restángulo $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.
Respuesta $\frac{2}{3}$.

e) $\iint\sqrt{r^2-\frac{a^2y^2}{x^2}}\,d\sigma$ en el triángulo limitado por el eje OX, la recta $x=a$ y la recta $y=\frac{r}{a}x$; $r>0$, $a>0$.
Respuesta $\frac{\pi ar^2}{8}$.

2. Establecer, por medio de integrales dobles, las fórmulas conocidas para las áreas de: a) un triángulo; b) un trapecio; c) un sector circular y d) una elipse.

3. Por medio de la transformación de una doble integral en una integral reiterada, demostrar que:

a) $$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)\,dx$$

para una función cualquiera f(x,y) continua en el triángulo limitado por las rectas $y=0$, $x=a$, $y=x$ $(a>0)$;

b) $$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$$

para una función cualquiera f(x,y) continua en el primer cuadrante del círculo $x^2+y^2=a$.

4. Demostrar que el volumen de un segmento esférico se expresa por la fórmula

$$V=\pi w^2\left(r-\frac{w}{3}\right),$$

donde r es el radio de la esfera y w la altura del segmento.

5. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ y el plano $z=k\,(k>0)$.

Respuesta $\frac{1}{2}\pi abk^2$.

6. Las coordenadas del centro de gravedad de un dominio plano ω con una masa uniformemente distribuida, son los valores medios de las funciones x,y; es decir

$$\xi=\frac{1}{|\omega|}\iint_{\omega} x\,d\omega, \quad \eta=\frac{1}{|\omega|}\iint_{\omega} y\,d\omega.$$

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de:

a) el semicírculo $x^2+y^2\leqslant r^2,\ y\geqslant 0$;

b) el triángulo del ejemplo 2 (Pág.338)

Respuesta a) $\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$; b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

CAPITULO XXI

LA INTEGRAL CURVILINEA O DE LINEA

1. Arco Simple. Admitamos que las funciones

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\phi(t)\quad (a\leq t\leq b) \qquad (1)$$

son continuas en el intervalo $[a, b]$. Al conjunto de todos los puntos del espacio, cuyas coordenadas (x, y, z) corresponden a uno y al mismo valor de la variable t se le llama arco simple (o abreviadamente arco) si a los diferentes valores del parámetro t corresponden diferentes puntos, o en otras palabras si las igualdades

$$f(t')=f(t''),\ \varphi(t')=\varphi(t''),\ \phi(t')=\phi(t'')$$

implican que $t'=t''$.

Los puntos A, B, correspondientes a los valores externos a, b del parámetro t se denominan extremos del arco. Se dice que un arco tal une los puntos A y B (Fig. 59). Un arco simple se designa también por el símbolo $\widehat{AB}$.

La representación paramétrica de un arco simple por medio de las funciones que satisfagan las condiciones arriba anotadas, se llama normal.

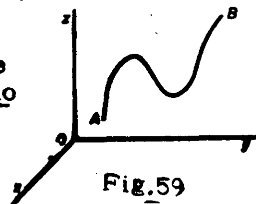


Fig.59

Ejemplos:

Son arcos simples: a) un segmento; b) una línea quebrada $AA_1A_2\ldots A_n$ siempre que los segmentos contiguos tengan un solo punto común y que los que no lo sean no tengan punto común alguno; c) un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo central α, , donde $0<\alpha<2\pi$); y d) la gráfica de una función continua $y=f(x)$, en el intervalo $[a, b]$. En el caso d), el arco paramétricamente se representa así:

$$x=t,\ y=f(t),\ z=0\quad (a\leq t\leq b)$$

Teniendo una representación paramétrica normal cualquiera de un arco simple, podemos obtener de ella un conjunto infinito de otras representaciones. Basta para ello tomar una función contínua arbitraria $t=\alpha(s)$ estrictamente monótona en un cierto intervalo $[a', b']$ y que tome los valores a, b en los extremos de este intervalo. Las nuevas representaciones paramétricas serán

$$x=f[\alpha(s)]=f_1(s),\quad y=\varphi[\alpha(s)]=\varphi_1(s),$$
$$z=\phi[\alpha(s)]=\phi_1(s)\quad (a'\leq s\leq b').$$

Si en el carco $\widehat{AB}$ se considera una dirección determinada, es decir, si tomamos al punto A como principio y al B como final, se presentarán entonces dos posibilidades: al punto A corresponde el valor $t=a$, o bien $t=b$. del parámetro t. En el primer caso, diremos que la representación paramétrica concuerda con la dirección escogida y que en el segundo, no concuerda. Si la representación no concuerda con la dirección escogida, entonces, haciendo $t=-s$, , obtendremos la representación concordante:

$$x=f(-s)=f_1(s),\ y=\varphi(-s)=\varphi_1(s),$$
$$z=\psi(-s)=\psi_1(s)\ (-b\leqslant s\leqslant -a).$$

Ejemplos:

1. Obtenemos la representación normal del segmento que une los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, haciendo, por ejemplo

$$x=x_1+(x_2-x_1)t,\ y=y_1+(y_2-y_1)t,$$
$$z=z_1+(z_2-z_1)t$$

para $0\leqslant t\leqslant 1$.. Esta representación concuerda con la dirección de A á B.

2. Obtenemos la representación normal de la mitad superior de la elipse

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

escribiendo

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ z=0$$

para $0\leqslant t\leqslant \pi$. . Obtenemos otra representación normal haciendo, por ejemplo $t=s^2$, y por lo tanto,

$$x=a\cos s^2,\ y=b\sin s^2,\ z=0, \qquad 0\leqslant s\leqslant \sqrt{\pi}.$$

2. Integral de Línea a lo Largo de un Arco. Admitamos que el arco simple $\widehat{AB}$ está dado por la representación normal

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t)\ (a\leqslant t\leqslant b) \qquad (I)$$

y además, que la función (I) tiene derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. .Tomemos en el arco la dirección de A hacia B y supongamos que la representación paramétrica (I) concuerda con la dirección escogida. Sea $P(x, y, z)$ una función definida y continua en todos los puntos del arco $\widehat{AB}$. Formemos una cortadura cualquiera del intervalo $[a, b]$ y designemos con $t_0=a<t_1<t_2<$ los extremos de los segmentos Δt_1, Δt_2, que constituyen esta cortadura.

Tomemos en cada uno de estos segmentos un punto arbitrario ϑ_1, ϑ_2,... Sean

$$x_0=f(t_0),\ x_1=f(t_1),\ x_2=f(t_2),\ \ldots;$$
$$\xi_1=f(\vartheta_1),\ \xi_2=f(\vartheta_2),\ \ldots;$$
$$\eta_1=\varphi(\vartheta_1),\ \eta_2=\varphi(\vartheta_2),\ \ldots,$$
$$\zeta_1=\psi(\vartheta_1),\ \zeta_2=\psi(\vartheta_2),\ \ldots$$

Formemos la suma

$$G = P(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)(x_1 - x_0) + P(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)(x_2 - x_1) + \dots \quad (1)$$

Haciendo $F(t) = P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]$, escribamos la suma (I) como

$$G = F(\vartheta_1)[f(t_1) - f(t_0)] + F(\vartheta_2)[f(t_2) - f(t_1)] + \dots \quad (2)$$

De acuerdo con el teorema sobre el valor medio, existen puntos ϑ_1', ϑ_2', para los cuales tienen lugar las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{ll} f(t_1) - f(t_0) = f'(\vartheta_1')(t_1 - t_0) & (t_0 < \vartheta_1' < t_1), \\ f(t_2) - f(t_1) = f'(\vartheta_2')(t_2 - t_1) & (t_1 < \vartheta_2 < t_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{array}\right\} \quad (3)$$

Hagamos $F(\vartheta_1) = F(\vartheta_1') + \varepsilon_1, \quad F(\vartheta_2) = F(\vartheta_2') + \varepsilon_2, \dots$

Entonces, en virtud de (2), obtenemos

$$G = G' + R, \quad (4)$$

donde

$$G' = F(\vartheta_1')f'(\vartheta_1')\Delta t_1 + F(\vartheta_2')f'(\vartheta_2')\Delta t_2 + \dots, \quad (5)$$

y

$$R = \varepsilon_1 f'(\vartheta_1')\Delta t_1 + \varepsilon_2 f'(\vartheta_2')\Delta t_2 + \dots$$

Si se designa ahora con η al mayor de los números $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \dots$, y con M al valor máximo de la función $|f'(t)|$ en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$|R| \leq M\eta\Delta t_1 + M\eta\Delta t_2 + \dots = M\eta(b - a). \quad (6)$$

Tomemos una secuencia normal arbitraria $\{\delta_n\}$, de cortaduras y designemos con $\{G_n\}$ la secuencia de las sumas correspondientes, formadas análogamente a la suma G. De acuerdo con (4), para una definición análoga de las sumas G_n' y R_n tendremos:

$$G_n = G_n' + R_n, \quad (7)$$

y, de acuerdo con (6)

$$|R_n| \leq M\eta_n(b - a), \quad (8)$$

y

$$\lim_{n \to \infty} G_n' = \int_a^b F(t)f'(t)\,dt.$$

En virtud de la continuidad uniforme de la función $F(t)$ tendremos $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$, y por consiguiente, de (8), $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} G_n = \int_a^b F(t)f'(t)\,dt = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]f'(t)\,dt. \quad (9)$$

El límite de la secuencia $\{G_n\}$ se llama integral de línea de la función $P(x, y, z)$, tomada a lo largo del carco AB en la dirección de A a B, se designa con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx. \quad (10)$$

Así pues, obtenemos la fórmula

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dx = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]f'(t)\,dt. \qquad (11)$$

Observación 1. Puede demostrarse (omitimos la demostración) - que el valor de la integral de línea (10) no depende de la representación - paramétrica (I) siempre que ésta concuerde con la dirección escogida en el arco. En otras palabras, si el arco $\widehat{AB}$ se diera a través de otra re - presentación normal que también concordara con la dirección escogida, procediendo entonces de una manera análoga, obtendríamos el mismo va- lor para la integral (10)

Observacion 2. Si en el arco se toma la dirección de B á A, en - tonces, como se sabe, la representación

$$x=f(-s),\ y=\varphi(-s),\ z=\psi(-s) \qquad (-b\leqslant s\leqslant -a)$$

es una representación normal del arco $\widehat{AB}$, que concuerda con la direc ción de B á A.

De este modo

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y, z)\,dx = \int_{-b}^{-a} P[f(-s), \varphi(-s), \psi(-s)][-f'(-s)]\,ds.$$

Haciendo $s=-t$, , obtenemos

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y, z)\,dx = -\int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]f'(t)\,dt.$$

Por lo tanto

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y, z)\,dx = -\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dx. \qquad (12)$$

Observación 3. Si en el arco AB tomamos un punto arbitrario C, correspondiente al valor del parámetro $t=c\ (a<c<b)$, , entonces

$$\int_{\widehat{AC}} P(x, y, z)\,dx = \int_a^c P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]f'(t)\,dt,$$

$$\int_{\widehat{CB}} P(x, y, z)\,dx = \int_c^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]f'(t)\,dt.$$

Por consiguiente, en virtud de (II)

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dx = \int_{\widehat{AC}} P(x, y, z)\,dx + \int_{\widehat{CB}} P(x, y, z)\,dx.$$

Observación 4. En la forma análoga se definen las integrales de línea simbolizadas por

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dy, \qquad \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dz.$$

Para estas integrales se verifican las siguientes relaciones:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dy = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \phi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\,dz = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \phi(t)]\,\phi'(t)\,dt.$$

Ejemplos:

1. Calcular la integral $\int_{\widehat{AB}} (x^2+y^2)\,dy$ a lo largo del arco de la hélice

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = at \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

desde $A(r, 0, 0)$ hasta $B(r, 0, 2\pi a)$.

Substituímos esta integral por una integral definida ordinaria, tomando en cuenta que

$$\frac{dy}{dt} = r\cos t.$$

De esta manera

$$\int_{AB} (x^2+y^2)\,dy = \int_0^{2\pi} r^2 \cos t\,dt = 0.$$

Obtenemos análogamente

$$\int_{AB} (x^2+y^2)\,dx = \int_0^{2\pi} -r^2 \sin t\,dt = 0,$$

$$\int_{AB} (x^2+y^2)\,dz = \int_0^{2\pi} r^2 a\,dt = 2\pi r^2 a.$$

2. Calcular la integral $\int x\,dy$ a lo largo del arco

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

en la dirección contraria a la de la representación paramétrica.

Tenemos aquí

$$\int x\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,dt = -\frac{\pi a^2}{4}.$$

3. Integral de Línea a lo Largo de una Curva Arbitraria. Admitamos que la curva C está formada por un número finito de arcos simples $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, ... (Fig. 60). Escojamos en estos arcos direcciones tales que un punto que sea extremo de dos arcos consecutivos, sea principio de uno y final del otro. Admitamos por ejemplo, que hemos relacionado las direcciones $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, ... Las direcciones de estos arcos nos definen una cierta dirección en la curva. Si la función $P(x, y, z)$ es definida y contínua en todos los puntos de la curva C, entenderemos entonces como integral de línea de la función $P(x,y,z)$ según la curva C (en una dirección escogida), la suma de las integrales a lo largo de cada arco en particular+

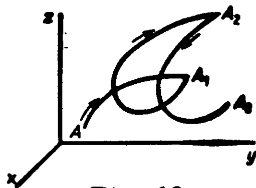


Fig. 60

Así pues, por definición

$$\int_C P(x, y, z)\,dx = \int_{\widehat{AA_1}} P(x, y, z)\,dx + \int_{\widehat{A_1A_2}} P(x, y, z)\,dx + \ldots$$

Sea una curva dada por la representación paramétrica

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \phi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Admitamos que en los intervalos $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots$ $(a < a_1 < a_2 < \ldots < b)$ estas funciones son continuas, que poseen derivadas continuas (unilaterales en los extremos), y que además estas funciones, consideradas en los intervalos (a, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., dan representaciones normales de los arcos $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, ..., concordantes con las direcciones seleccionadas. Es fácil observar que bajo tales suposiciones, tendremos:

$$\int_C P(x, y, z)\,dx = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \phi(t)]\,f'(t)\,dt.$$

Si en los puntos $a_1, a_2, \ldots$ no existe la derivada $f'(t)$, deberá interpretarse esta integral en el sentido impropio.

Caben observaciones análogas para las integrales

+Obviamente, bajo la condición que las integrales en cada uno de estos arcos existan.

$$\int_C P(x, y, z)\,dy, \quad \int_C P(x, y, z)\,dz.$$

Ejemplos.

1. Calcular la integral

$$\int_{AB} (x+2y-z)\,dx$$

a lo largo de una línea quebrada que una los puntos $A(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$.

Según lo anterior, es necesario evaluar la integral en el segmento de A á C y enseguida en el segmento de C á B, sumando los resultados obtenidos.

Dado que a lo largo del segmento AC tenemos $y=z=0$, , la integral primera será entonces una integral definida ordinaria:

$$\int_{AC} (x+2y-z)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

La segunda integral es igual a cero, ya que x es constante en el segmento CB.

2. Calcular la integral.

$$\int_{AB} (x^2+y)\,dx$$

desde el punto $A(0, 0)$hasta el punto $B(0, 1)$;
a) a lo largo del segmento que une estos puntos; b) a lo largo de la curva formada por el segmento AC que une el punto A con el punto $C(1, 0)$, y por el arco menor de una circunferencia unitaria que una los puntosC y B; c) a lo largo de la línea quebrada ABC.

En el caso b), tenemos:

$$\int_{AB} (x^2+y)\,dx = \int_{AC} (x^2+y)\,dx + \int_{CB} (x^2+y)\,dx.$$

La primera integral es una integral definida ordinaria, ya que $y=0$ en AC.

Calculamos la segunda integral haciendo

$$x=\cos t, \; y=\sin t \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t.$$

Así pues

$$\int_{AC} (x^2 + y)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_{CB} (x^2 + y)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin t) \sin t\,dt = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right).$$

De aquí que

$$\int_{AB} (x^2 + y)\,dx = -\frac{\pi}{4}.$$

En el caso c), de acuerdo con lo anterior

$$\int_{AC} (x^2 + y)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Para calcular la integral en el segmento CB, aplicamos la representación paramétrica.

$$x = 1 - t,\ y, = t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Obtenemos

$$\int_{CB} (x^2 + y)\,dx = -\int_0^1 [(1 - t)^2 + t]\,dt = -\frac{5}{6}.$$

De esta manera, en este caso

$$\int_{AB} (x^2 + y)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}.$$

4. El trabajo Como una Integral de Línea. Como se sabe si un punto material se desplaza rectilíneamente desde el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ hasta el $B(x_2, y_2, z_2)$ bajo la acción de una fuerza constante P, paralela al eje OX, el trabajo realizado por esta fuerza se expresará entonces por la fórmula

$$L = P(x_2 - x_1).$$

Supongamos ahora que las funciones (I) (Pág.345) describen el movimiento de un cuerpo material a lo largo de la curva (C). Supongamos además que durante el movimiento, el punto experimenta la acción de una fuerza que permanece paralela al eje OX, aunque variando en magni-

tud. Sea que $P(x,y,z)$ designe el módulo de esta fuerza en el punto (x,y,z), que se halla en la curva (C). Formemos una cortadura arbitraria - δ del segmento $[a,b]$ con los puntos $a<t_1<t_2<\ldots$, a los que en la - curva corresponden los puntos A_0, A_1, A_2, ... cuyas coordenadas son respectivamente (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), ...

Las expresiones

$$P(x_0, y_0, z_0)(x_1-x_0), \quad P(x_1, y_1, z_1)(x_2-x_1), \ldots$$

representan los trabajos efectuados en los segmentos A_0A_1, A_1A_2, ..., por las fuerzas constantes $P(x_0, y_0, z_0)$, $P(x_1, y_1, z_1)$, ... respectivamente.

De esta manera, a la suma

$$G=P(x_0, y_0, z_0)(x_1-x_0)+P(x_1, y_1, z_1)(x_2-x_1)+\ldots$$

Puede considerársele como un valor aproximado del trabajo realizado - por la fuerza operante.

Dado que para cada secuencia normal $\{\delta_n\}$ de cortadura la secuencia correspondiente $\{G_n\}$ de las sumas tiende a la integral de línea

$$\int_C P(x,y,z)\,dx,$$

entonces, intuitivamente, diremos que la anterior integral da la magnitud del trabajo realizado por la fuerza variable $P(x,y,z)$ a lo largo de la curva C .

Observación. Si la fuerza variable lo es en módulo y en dirección, - designando entonces con $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sus proyecciones - sobre los ejes coordenados, determinamos el trabajo realizado por la - fuerza a lo largo de la curva C, por medio de la fórmula

$$L=\int_C P(x,y,z)\,dx+\int_C Q(x,y,z)\,dy+\int_C R(x,y,z)\,dz.$$

Usualmente, se escribe en la forma abreviada siguiente:

$$L=\int_C P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz.$$

Ejemplo.

Calcular el trabajo efectuado por una fuerza constante tanto en magnitud como en dirección, por ejemplo la fuerza debida a la gravedad, al desplazarse un punto a lo largo de una curva dada.

Haciendo coincidir la dirección positiva del eje OZ con la dirección de la fuerza (lo que es siempre posible, escogiendo convenientemente el sistema de coordenadas) tendremos:

$$P(x, y, z)=Q(x, y, z)=0, \qquad R(x, y, z)=c,$$

donde c es una constante positiva.

Si la curva esta dada en forma paramétrica

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

y el movimiento tiene lugar en una dirección concordante con esta representación paramétrica, obtendremos entonces

$$L=\int_C c\,dz=\int_\alpha^\beta c\psi'(t)\,dt=c[\psi(\beta)-\psi(\alpha)].$$

Designado el principio y el fín de la curva con (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), encontramos

$$L=c(z_2-z_1).$$

Vemos, que en este caso, el trabajo no depende de la trayectoria, sino únicamente de la diferencia de niveles medidos según el eje OZ.

5. Curva Cerrada. Una curva formada por dos arcos simples que posean solo extremos comunes, se denomina **curva cerrada simple.**

Tales son, por ejemplo, la circunferencia, la elipse, el triángulo, el polígono, etc.

Una curva cerrada simple puede darse también por medio de una representación paramétrica:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \qquad (1)$$

en la que las funciones $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ son continuas y satisfacen las siguientes condiciones

1) $f(a)=f(b), \quad \varphi(a)=\varphi(b), \quad \psi(a)=\psi(b);$

2) si para dos valores distintos t', t'' del parámetro se cumple

$f(t')=f(t''),\ \varphi(t')=\varphi(t''),\ \psi(t')=\psi(t''),$ entonces $t'=a,\ t''=b,$ o bien $t'=b,\ t''=a.$

En otras palabras, en la representación (I), a cada punto de la curva, con exclusión de uno de ellos, corresponde solo un valor del parámetro. Al punto excluido, le corresponden dos valores del parámetro t, a saber $t=a$ y $t=b$. . A una representación hecha con funciones que po - sean las propiedades indicadas, se le llama n o r m a l .

Consideremos algunas propiedades importantes de las curvas cerra das simples planas.

a). Cada curva de este tipo divide al plano en dos dominios, de los - cuales, uno (limitado) ω se llama dominio interior de la curva C, - y el segundo (ilimitado) ω' se llama dominio exterior de la curva C, la curva C es la frontera de los dominios ω, ω'.

b). Dos puntos cualesquiera del dominio ω (o dos cualesquiera - del ω') pueden unirse por una línea quebrada que no posea puntos co- munes con la curva C.

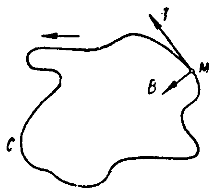


Fig. 61

c). Cada arco simple, uno de cuyos extremos se halle en el dominio ω, y el otro en ω', , corta a la cur- va C.
Fácilmente verificará el lector en una forma intituiva estas propiedades para la circunferencia, el triángulo y el polígono. En el caso general, su demostración es compleja, por lo que la omitiremos.

En una curva C pueden escogerse dos direcciones. Si la curva C. es plana, a una de ellas se le llama i z q u i e r d a y a la otra d e r e c h a. Suponiendo que, con exclusión de algunos puntos, la curva C posea tan - gente, es entonces posible caracterizar la dirección izquierda de la si- guiente manera.

En un punto arbitrario M de nuestra curva trazamos el segmento MB perpendicular a la tangente en este punto, encontrándose este segmento - (excepto el punto M) totalmente dentro del dominio limitado por la curva (Fig. 61).Si el vector $\overline{MB}$ forma con la dirección de la tangente (que con- cuerda con la de la curva) un ángulo $+\frac{\pi}{2}$, , entonces la dirección esco gida en la curva será izquierda. La conveniencia de esta dirección con- siste que al avanzar a lo largo de la curva en la dirección izquierda, - tendremos un dominio limitado por la curva por el lado izquierdo.

Si la curva C está dada por una representación normal, esta repre - sentación puede ser entonces concordante o no concordante con la direc- ción tomada en la curva. Si la dirección es no concordante con la direc ción adoptada, entonces, haciendo $t=-s$, obtendremos una representa - ción concordante (ver Pag. 345)

Ejemplos.

1. Haciendo

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

obtenemos la representación paramétrica normal de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

concordante con la dirección izquierda.

2. La representación normal paramétrica del cuadrado con vértices en $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ puede darse por ejemplo, así

$x = t, \quad y = 0$ para $0 \leqslant t \leqslant 1;$
$x = 1, \quad y = t-1$ para $1 \leqslant t \leqslant 2;$
$x = 3-t, \; y = 1$ para $2 \leqslant t \leqslant 3;$
$x = 0, \quad y = 4-t$ para $3 \leqslant t \leqslant 4.$

Es fácil verificar que las funciones de este modo definidas

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

son continuas en el intervalo $[0, 4]$ y que satisfacen las condiciones 1) y 2). Cuando t crece de cero a cuatro, el punto $(f(t), \varphi(t))$ recorre el cuadrado en la dirección izquierda

pasando por cada punto solo una vez (con exclusión del punto $(0, 0)$).

Substituyendo en estos ejemplos á t por -s obtenemos representaciones normales concordantes con la dirección derecha.

6. Integral de Línea a lo Largo de una Curva Cerrada. Admitamos que la curva cerrada simple C está dada por la representación paramétrica normal

$$x = f(t), \; y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Supongamos que en los intervalos

$$(a, a_1), \quad (a_1, a_2), \ldots [a < a_1 < a_2 < \ldots < b]$$

las funciones dadas poseen derivadas contínuas (unilaterales en los extremos). Si la función $P(x, y, z)$ es definida y contínua en los puntos de la curva C, entonces de acuerdo con el parágrafo 3

$$\int_C P(x, y, z)\,dx = \pm\int_a^b P[f(t), \; \varphi(t), \; \psi(t)]f'(t)\,dt,$$

dependiendo el signo de que la integral se tome concordantemente con la representación paramétrica de la curva C o en la dirección contraria.

Si en la curva tomamos dos puntos arbitrarios A y B (Fig. 62), entonces, haciendo que los arcos $\widehat{AmB}$ y $\widehat{BnA}$ tengan direcciones concordantes con la dirección escogida en la curva, podrá escribirse

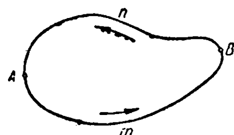


Fig.62

$$\int_C P(x, y, z)\,dx = \int_{\widehat{AmB}} P(x, y, z)\,dx + \int_{\widehat{BnA}} P(x, y, z)\,dx.$$

<u>7. Integrales de Línea a lo Largo de Curvas Planas Cerradas.</u> Sean C_1, C_2 dos curvas cerradas planas cuya parte común sea solo el arco simple AB (Fig. 63). Admitamos además que los dominios interiores ω_1 y ω_2, limitados por las curvas C_1 y C_2, no poseen puntos comunes. Supongamos que la curva C_1 esté formada por los arcos L_1 y AB, y la C_2 por L_2 y AB. Los arcos L_1 y L_2 forman una curva cerrada simple C, que limita al dominio ω, el que a su vez contiene a los dominios ω_1 y ω_2. Si en las curvas C_1 y C_2 se elige la dirección izquierda, las direcciones de los arcos L_1 y L_2 en C serán concondantes con su dirección izquierda. Puesto que el arco AB tiene en las curvas C_1, C_2 direcciones contrarias, entonces

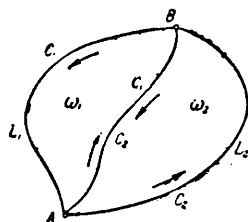


Fig.63

$$\int_{C_1} P(x, y)\,dx = \int_{L_1} P(x, y)\,dx + \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\,dx,$$
$$\int_{C_2} P(x, y)\,dx = \int_{L_2} P(x, y)\,dx + \int_{\widehat{BA}} P(x, y)\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx = \int_{L_1} P(x, y)\,dx + \int_{L_2} P(x, y)\,dx.$$

Así que

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx.$$

Admitamos que la frontera C del dominio ω está formada por varias curvas cerradas simples $C_1, C_2, C_3, \ldots$ (Fig. 64) Se llamará dirección izquierda de la curva C_1 respecto al dominio ω a la dirección tal, que al recorrer la curva C_1 tengamos al dominio ω a la izquierda. Así pues, la dirección izquierda respecto a un dominio, depende de que éste se halle dentro o fuera de la curva cerrada dada. Por ejemplo, para un dominio comprendido dentro de dos circunferencias concéntricas, la

dirección izquierda respecto al dominio en la circunferencia interior, será contraria a la dirección izquierda a la circunferencia exterior. En forma análoga se define la dirección izquierda respecto a ω en las curvas $C_2, C_3, \ldots$

Tomemos en cada una de las curvas $C_1, C_2, \ldots$ dirección izquierda respecto a ω

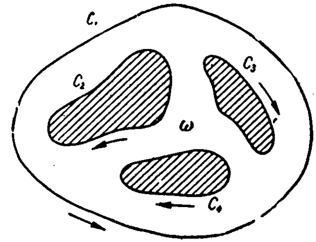


Fig. 64

Se llama entonces integral de línea tomada a lo largo de la frontera C en la dirección izquierda, a la suma de las integrales tomadas a lo largo de las curvas $C_1, C_2, \ldots$ (en la dirección izquierda respecto a ω :

$$\int_C P(x, y)\,dx =$$

$$= \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx + \ldots$$

Consideremos el siguiente teorema:

Si un dominio cerrado ω es la suma de dos dominios cerrados ω_1, ω_2, que no poseen entre sí puntos interiores comunes, entonces, suponiendo que las correspondientes fronteras C, C_1, C_2 estén constituídas por un número finito de curvas simples cerradas (Fig. 65) , podrá escribirse

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx.$$

Las integrales se toman en una misma dirección respecto al dominio. Esta última relación es clara intuitivamente, si observamos que cuando un cierto arco pertenece a C, entonces o pertenece solo C_1, o solo C_2 con la misma dirección que en C; si por el contrario, un cierto arco, no perteneciente a C, pertenece a C_1, pertenecerá necesariamente a C_2, pero con dirección contraria en C_1.

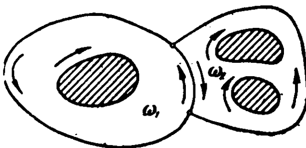


Fig. 65

8. Teorema (Fórmula) de Green. - Sea ω un dominio normal definido por las desigualdades:

$$a < x < b, \qquad f_1(x) < y < f_2(x),$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$. Sea $P(x, y)$, una función dada definida y contínua tanto en el interior como en la frontera del dominio ω. Supongamos además que la derivada $\frac{\partial P}{\partial y}$ es acotada y contínua en todo punto interior del dominio ω. . Tiene lugar entonces la siguiente relación

$$\int_C P(x, y)\,dx = -\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma, \qquad (1)$$

donde C es la frontera del dominio ω, y la integral se toma en la dirección izquierda.

Demostración. Es fácil ver (observación 2, Pag. 347) que

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_a^b P[x, f_1(x)]\,dx - \int_a^b P[x, f_2(x)]\,dx, \qquad (2)$$

y

$$\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

ya que

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)] \text{ для } a < x < b,$$

entonces

$$\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma = \int_a^b \{[P(x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)]\}\,dx. \qquad (3)$$

Igualando (2) y (3), obtenemos:

$$\int_C P(x, y)\,dx = -\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma.$$

Se supone que el dominio ω puede dividirse en un número finito de dominios $\omega_1, \omega_2, \dots,$ normales respecto al eje OX, la fórmula (I) es válida también en este caso.

En efecto, designando con $C_1, C_2, \dots$ las fronteras de los dominios $\omega_1, \omega_2,$, obtenemos, de acuerdo con el teorema que conocemos (Pag.

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx + \dots$$

Aplicando solo el teorema demostrado, hallamos

$$\int_C P(x, y)\,dx = -\iint_{\omega_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma - \iint_{\omega_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma -$$

Por consiguiente

$$\int_C P(x, y)\, dx = -\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma.$$

Bajo las suposiciones correspondientes respecto a la frontera del dominio ω y respecto a la función $Q(x, y, z)$, encontramos, procediendo en forma análoga a lo anterior

$$\int_C Q(x, y)\, dy = \iint_\omega \frac{\partial Q}{\partial x}\, d\sigma.$$

Reuniendo ambas fórmulas abtenemos

$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_\omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma.$$

Esta fórmula contiene a las dos anteriores como casos particulares (para $Q=0$, respectivamente) y se denomina Fórmula de Green.

Ejemplo. Aplicando la fórmula de Green a la integral

$$\int_C (2x - 3y)\, dx + (x - y)\, dy,$$

donde C denota una circunferencia unitaria, recorrida en la dirección izquierda, obtenemos

$$P(x, y) = 2x - 3y, \qquad Q(x, y) = x - y,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Por consiguiente

$$\int_C (2x - 3y)\, dx + (x - y)\, dy = \iint_\omega 4\, d\sigma = 4\pi.$$

Es fácil verificar este resultado calculando directamente la integral dada.

9. Aplicaciones del Teorema de Green. El teorema de Green es uno de los teoremas fundamentales de la teoría de las integrales dobles. Sus aplicaciones son de particular importancia en la Física Matemática.

El valor fundamental del teorema de Green radica en que permite expresar una integral de línea por medio de una integral doble e inversamente.

Indiquemos aquí algunas de las consecuencias inmediatas.

1. Designando con C la frontera del dominio ω, y con A su área

al hacer

$$P(x, y) = y, \ \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

encontramos

$$\int_C y\,dx = -\iint_\omega d\sigma = -A.$$

Haciendo además

$$Q(x, y) = x, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

obtenemos

$$\int_C x\,dy = \iint_\omega d\sigma = A.$$

Por lo tanto

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x\,dy - y\,dx).$$

Las integrales se toman en la dirección izquierda.

2.Designemos con ω un dominio contenido en el interior de una curva cerrada C. Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones acotadas y contínuas dentro de ω con derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ acotadas y contínuas también dentro de ω. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema. Para que cualquier curva cerrada c, ubicada dentro de ω, tenga lugar la relación,

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

es necesario y suficiente que en cada punto (x, y) del dominio ω se verifique la igualdad.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Supondremos que en la curva cerrada C es aplicable el teorema de Green.

Demostración. Suponiendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

obtenemos, de acuerdo con la fórmula de Green

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_{\omega'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0,$$

lo que demuestra la suficiencia de la condición.

Admitamos ahora que para cada curva cerrada simple C' tiene lugar la relación

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

De aquí se desprende, de acuerdo con la fórmula de Green

$$\iint_{\omega'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0.$$

Sea que la proposición del teorema no se cumple, de tal suerte que en un cierto punto (x_0, y_0) del dominio ω tengamos, por ejemplo.

$$\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = \alpha > 0.$$

En virtud de la continuidad de la función $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ se encuentra un círculo suficientemente pequeño K con centro en el punto (x_0, y_0), en cada uno de cuyos puntos se cumple la desigualdad.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > \frac{1}{2}\alpha.$$

Entonces

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma \geqslant \frac{1}{2}\alpha\,|K| > 0$$

(Con $|K|$ se designa el área del círculo K). Pero esto contradice la relación (1), válida para cada dominio ω, esto es, para cada círculo K.

Procedemos análogamente para $\alpha < 0$.

Observación. Admitamos que para cada curva cerrada simple C', ubicada dentro de ω, tengamos

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Bajo una condición tal, puede afirmarse que si dos puntos cualesquiera A y B del dominio ω se unen por el arco AB, ubicado en ω entonces la integral

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

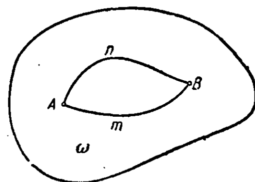


Fig. 66.

no depende del arco $\widehat{AB}$, sino solo del punto inicial A y del final B. En otras palabras, esta integral tiene un valor y solo uno en todos los arcos que unan al punto A con el punto B.

En efecto, unamos los dos puntos A y B por medio de dos arcos AmB y AnB (Fig. 66), que no tengan puntos comunes, excepto A y B. Considerando la curva cerrada $AmBnA$, tenemos

$$\int_{AmBnA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

por consiguiente

$$\int_{AmB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{BnA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

así que

$$\int_{AmB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{AnB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \quad (2)$$

Admitamos ahora que los arcos AmB y AnB tengan, además de los puntos A y B, un número finito de puntos comunes aislados de ambos arcos. Demostraremos que la fórmula (2) sigue siendo válida en este caso.

En efecto, designando con $P, Q, \ldots, R, S$ ordenadamente los puntos aislados y los extremos de ambos arcos (Fig. 67) observamos fácilmente que en virtud de lo ya indicado, las integrales de línea, tomadas en los tramos AP, PQ, ... del arco AmB, son respectivamente iguales a los tomados en los tramos correspondientes del arco AnB:

Por lo tanto

$$\int_{AmB} = \int_{AP} + \int_{PQ} + \cdots = \int_{AnB}.$$

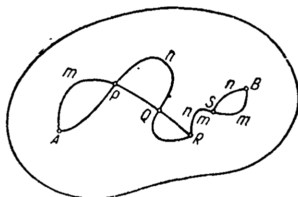


Fig. 67

La fórmula (2) es válida también cuando los arcos AmB y AnB posean un número finito de puntos comunes. Sin embargo es en este caso difícil la demostración, que omitiremos.

El lector fácilmente observará que, al contrario, de la suposición, la integral

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

no dependen del arco AB, sino solo de los puntos inicial y final, de - donde se sigue que para cada curva cerrada C', tendremos:

$$\int_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

Admitamos, como antes, que ω es la porción interior del do--- minio limitado por la curva cerrada C. Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones definidas y continuas en ω con derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ · continuas también en ω. Bajo estas condiciones, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema. 2. para que exista la función $V(x, y)$, definida en ω tal que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ sean sus derivadas parciales respecto a x, y, respectivamente, es necesario y suficiente que en cada punto del dominio ω se cumpla la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Demostración. Demostramos que era necesaria en la Pág. 176.- En efecto, si

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y),$$

entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Para la demostración de la suficiencia, admitamos que en el dominio ω se cumple la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

En virtud de la observación en la Pág. 361, el valor de la integral

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

no dependen del arco AB, sino únicamente del punto inicial A y del - final B.

Obtenemos la función $V(x, y)$ de la siguiente manera. Tomemos- en ω un punto cualquiera $A(x_0, y_0)$. Determinamos el valor de la -- función $V(x, y)$ en un punto arbitrario $B(x, y)$ del dominio ω haciendo

$$V(x, y) = \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy; \qquad V(x_0, y_0) = 0,$$

donde AB es un arco arbitrario que une los puntos A y B. Para la determinación de las derivadas parciales de la función $V(x, y)$, observemos que si el punto C del dominio ω posee las coordenadas $(x+h, y)$, , entonces

$$V(x+h, y) = \int_{ABC} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

donde el arco ABC está formado por el arco AB y el segmento rectilíneo BC, paralelo al eje OX.

Por consiguiente

$$V(x+h, y) = \int_{\widehat{AB}} P\, dx + Q\, dy + \int_{BC} P\, dx + Q\, dy \text{ *)}$$

y

$$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{BC} P\, dx + Q\, dy.$$

Puesto que

$$\int_{BC} P\, dx + Q\, dy = \int_{x}^{x+h} P\, dx,$$

entonces

$$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} P(x, y)\, dx.$$

De quí que, en virtud del teorema sobre el valor medio (Pag. 272)

$$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = P(x + \vartheta h, y) \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Tomando en cuenta la continuidad de la función $P(x, y)$, obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y).$$

Se demuestra análogamente que

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y).$$

Observación. 1. Puede demostrarse que, bajo las condiciones del teorema anterior, la función $V(x, y)$ está definida con exactitud hasta

una constante arbitraria. Basta, obviamente, demostrar que la función $V(x, y)$ satisface dentro del dominio ω, limitado por la curva C, las condiciones

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

entonces

$$V(x, y)=\text{const.}$$

En efecto, uniendo dos puntos cualesquiera A y B del dominio ω por medio de un arco simple, ubicado completamente en ω, obtenemos:

$$\frac{dV[f(t), \varphi(t)]}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x} f'(t)+\frac{\partial V}{\partial y} \varphi'(t)=0,$$

donde $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ — constituyen la representación normal del arco AB.

Así pues

$$V[f(t), \varphi(t)]=\text{const.}$$

De aquí se sigue el valor de la función $V(x,y)$ en el punto A es igual a su valor en el punto B.

Observación. 2. Los resultados últimos son análogos al teorema sobre la existencia de la función primitiva para una función contínua de una variable.

Efectivamente, hemos demostrado que bajo determinadas condiciones, existe una función que posee una derivada dada y que dos funciones tales, difieren entre sí solo en una constante.

Ejemplos.

1. Las funciones

$$P(x, y)=x^2+y, \qquad Q(x, y)=0$$

no satisfacen a la condición de nuestro teorema, ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

Como nos hemos cerciorado ya (Pág.350, ejemplo 2 , la integral de línea $\int P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ puede tomar diferentes valores para distintas curvas que unan dos mismos puntos.

2. Para

$$P(x, y)=x+y, \qquad Q(x, y)=x-y^2$$

tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Por lo tanto, existe la función $V(x, y)$, para la cual

$$\frac{\partial V}{\partial x}=x+y, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}=x-y^2.$$

De la primera ecuación se sigue que

$$V(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y),$$

donde $\varphi(y)$ — es una cierta función de la variable y. La determinamos por medio de la segunda ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x-y^2,$$

de donde

$$\varphi'(y)=-y^2, \qquad \varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Finalmente,

$$V(x, y)=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{3}y^3+C.$$

CAPITULO XXII

TRANSFORMACIONES CONTINUAS.

CAMBIO DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES DOBLES

1. Transformaciones. Si a cada punto A de cierto conjunto E+) le corresponde un punto B de otro conjunto E_1 y cada punto del conjunto E_1 corresponde por lo menos a un punto del conjunto E, se dice que existe una *transformación univaluada definida* del conjunto E sobre el conjunto E_1.

El conjunto E_1 se llama *imagen* del conjunto E. Puede ocurrir que este conjunto esté parcial o totalmente contenido en E, o que coincida con él.

Ejemplos.

1. Sea que el conjunto E es un círculo de radio r con centro en O. A cada punto A del conjunto E, le hacemos corresponder en el punto medio B del segmento OA. La imagen del conjunto E será un círculo de radio $\frac{1}{2}r$ y concéntrico con el primero.

2. Sea E un triángulo cualquiera. A cada punto del conjunto E le hacemos corresponder su proyección sobre el eje OX. La imagen del conjunto E será un segmento alojado sobre el eje OX.

Si al punto A de coordenadas x, y, corresponde un punto B de coordenadas x', y', entonces la transformación se define mediante dos funciones dadas

$$x'=f(x, y), \quad y'=\varphi(x, y), \tag{1}$$

definidas en el conjunto E, las cuales dan la posibilidad de encontrar las coordenadas de B a través de las coordenadas de A.

Ejemplos.

3. Si en el ejemplo 1, del número P , el centro O tiene las coordenadas p, q, entonces la transformación se determina por las funciones

$$x'=\frac{x+p}{2}, \quad y'=\frac{y+q}{2}.$$

4. La transformación en el ejemplo 2 se determina por las funciones

$$x'=x, \quad y'=0.$$

5. A cada punto A (x, y) del conjunto E le hacemos corresponder el punto B (x', y'), cuyas coordenadas se determinan por las funciones

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \quad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

+) Supondremos que los conjuntos E y E_1 son planos, aunque esta restricción no es necesaria.

La imagen es el conjunto que se obtiene girando el conjunto E un ángulo en torno al origen de coordenadas.

2. Transformaciones Continuas. Transformaciones Biunívocas. Si las funciones (1), que definen la transformación, son continuas, entonces la transformación también lleva el nombre de continua.

Las transformaciones dadas en los ejemplos 1 á 5 son continuas.

Si a dos puntos diferentes del conjunto E corresponden siempre dos puntos diferentes del conjunto E_1, entonces tal transformación se dice que es biunívoca. (correspondencia de uno a uno).

En los ejemplos 1 y 5 las transformaciones son biunívocas. En el ejemplo 2 tenemos una transformación que no es biunívoca.

Sea que un conjunto E se **transforma biunívocamente sobre** el conjunto E_1 Si A es un punto arbitrario del conjunto E y B es el correspondiente punto de E_1, le corresponda aquel punto A del conjunto E, cuya imagen es el punto B, se llama transformación inversa.

Para determinar las funciones que definen la transformación inversa, es necesario resolver las ecuaciones (1) con respecto a x, y.

Si la transformación del conjunto E sobre el conjunto E_1 es biunívoca y continua, y si la transformación inversa también es continua, se dice que la transformación del conjunto E, sobre el conjunto E_1, es mutuamente continua.

Frecuentemente se dice, para abreviar, que el conjunto E_1 es la imagen continua (biunívoca) del conjunto E.

Ejemplos.

1. La transformación inversa para el ejemplo 1 (ver también el ejemplo 3) se determina por las funciones:

$$x = 2x' - p, \qquad y = 2y' - q.$$

2. La transformación inversa para el ejemplo 5 se determina por las funciones:

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha, \qquad y = y' \cos\alpha - x' \sin\alpha.$$

3. Las transformaciones dadas en los ejemplos 1 y 5 son mútuamente continuas.

Demos ahora algunos teoremas sobre las transformaciones continuas y

biunívocas (omitiremos las demostraciones).

Teorema 1. La transformación continua y biunívoca de un arco simple (curva cerrada) es también un arco simple (curva cerrada). Tal transformación es mutuamente continua.

Teorema 2. La transformación continua y biunívoca de un dominio también es un dominio.

Teorema 3. La imagen continua y biunívoca de una curva cerrada simple C y de un dominio ω, alojado en el interior de esta curva, es una curva cerrada simple C' y el dominio ω', que está dentro de ella. En esta transformación la imagen de la curva C será la curva C' y la imagen del dominio ω es el dominio ω'. Tal transformación es mutuamente continua.

3. Determinante Funcional (Jacobiano). Si las funciones

$$x' = f(x, y), \qquad y' = \varphi(x, y),$$

definidas en la vecindad de (x, y), tienen derivadas parciales de primer orden en este punto, entonces la expresión

$$f'_x(x, y)\,\varphi'_y(x, y) - f'_y(x, y)\,\varphi'_x(x, y) = \begin{vmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ \varphi'_x(x, y) & \varphi'_y(x, y) \end{vmatrix}$$

se llama determinante funcional o jacobiano de estas funciones.

El jacobiano se represente por el símbolo:

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} \text{ или } \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}.$$

Ejemplo 1. Si

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

entonces

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = r.$$

Demostremos ahora el siguiente teorema:

Teorema. Si las funciones $x' = f(x, y)$, $y' = \varphi(x, y)$.

continuas en el dominio ω, tienen derivadas parciales continuas entonces para todo punto (x, y), en el que el

jacobiano $\frac{D(x', y')}{D(x, y)}$ es diferente de cero, se puede elegir una vecindad tal de dicho punto que la transformación definida por estas funciones sea biunívoca en la vecindad elegida+).

Demostración. Sea que en el punto $A(x_0, y_0)$ el jacobiano es diferente de cero, esto es,

$$f'_x(x_0, y_0)\,\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\,\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0, \tag{1}$$

Aceptemos, contrariamente al teorema, que en toda vecindad del punto A se encuentren dos puntos distintos $A'(x, y)$, $B'(x+h,\ y+k)$, para los cuales se satisfacen las relaciones

$$f(x+h,\ y+k) = f(x, y), \qquad \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y). \tag{2}$$

Tomemos la secuencia de círculos, con centros en el punto $A(x_0, y_0)$ y con radios $\{r_n\}$, que tienden a cero. Según lo supuesto, en cada uno de estos círculos se encuentran dos puntos diferentes $A'_n\{x_n, y_n\}$ $B'_n\{x_n+h_n,\ y_n+k_n\}$, para los que tenemos:

$$f(x_n+h_n,\ y_n+k_n) = f(x_n,\ x_n),$$
$$\varphi(x_n+h_n,\ y_n+k_n) = \varphi(x_n,\ y_n).$$

Según el teorema sobre el valor medio tenemos:

$$f(x_n+h_n, y_n+k_n) - f(x_n,\ y_n) = h_n f'_x(\xi_n,\ \eta_n) + k_n f'_y(\xi_n,\ \eta_n) = 0,$$
$$\varphi(x_n+h_n,\ y_n+k_n) - \varphi(x_n,\ y_n) = h_n \varphi'_x(\xi'_n,\ \eta'_n) + k_n \varphi'_y(\xi'_n,\ \eta'_n) = 0$$

(ver Pág.188), donde

$$\xi_n = x_n + \vartheta_n h_n,\ \eta_n = y_n + \vartheta_n k_n,\ \xi'_n = x_n + \vartheta'_n h_n,$$
$$\eta'_n = y_n + \vartheta'_n k_n,\ 0 < \vartheta_n < 1,\ 0 < \vartheta'_n < 1.$$

Por cuanto h_n y k_n no son simultáneamente nulas, entonces del anterior sistema de ecuaciones homogéneas se desprende que

$$f'_x(\xi_n,\ \eta_n)\,\varphi'_y(\xi'_n,\ \eta'_n) - f'_y(\xi_n,\ \eta_n)\,\varphi'_x(\xi'_n,\ \eta'_n) = 0. \tag{3}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

tendremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,$$
$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} k_n = 0.$$

Pasando al límite y tomando en cuenta (3) y la suposición de que las derivadas parciales son continuas, obtenemos:

+) Puede demostrarse también que nuestra transformación también es mútuamente continua en esta vecindad.

$$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Pero esto contradice la relación (1). Por consiguiente, existe cierta vecindad del punto (x_o, y_o) en la que la transformación es biunívoca.

Ejemplo 2.

Sea dado el sistema de ecuaciones

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

donde las funciones $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ son continuas y poseen derivadas parciales continuas en la vecindad del punto (x_o, y_o) en el cual el jacobiano es diferente de cero, y sea

$$f(x_0, y_0) = a, \quad \varphi(x_0, y_0) = b.$$

De acuerdo con el último teorema, existe un círculo K, con centro en el punto (x_o, y_o), en el que la transformación definida por las últimas ecuaciones es biunívoca y continua. Según el teorema 3 (Pág. 370) la imagen del círculo K será cierta curva cerrada C y el dominio ω estará dentro de esta curva, a la que, en particular, pertenece el punto (a,b). La transformación es, además mutuamente continua. De esta manera, si (a_1, b_1) es un punto arbitrario dentro de la curva C, entonces en el interior del círculo K existe solamente un punto que satisface las ecuaciones.

$$f(x, y) = a_1, \quad \varphi(x, y) = b_1.$$

Este punto varía continuamente junto con (a_1, b_1).

Observación 1.

Si el jacobiano es diferente de cero en todos los puntos del dominio ω entonces la transformación en una cierta vecindad, de cada punto de este dominio es buinívoca. Puede, sin embargo, suceder que la transformación no sea buinívoca en todo el dominio.

Tomemos, por ejemplo, la transformación definida por las funciones:

$$x' = e^x \cos y, \quad y' = e^x \sin y \qquad (-\infty < x, y < +\infty).$$

El jacobiano de estas funciones es igual a e^{2x}, y por consiguiente, siempre es diferente de cero. No obstante, para x = 0, y = 0 ; x = 0, $y = 2\pi$ obtenemos x'= 1, y'= 0, así que la transformación no es biunívoca. Además, si en algún punto el jacobiano tiende a cero, entonces, a pesar de ello, la transformación en la vecindad de este punto puede ser buinívoca. Así la transformación definida por las funciones

$$x' = x^3, \; y' = y^3 \qquad (-\infty < x, y < +\infty), \tag{1}$$

es biunívoca; la transformación inversa se define por las funciones

$$x = \sqrt[3]{x'}, \quad y = \sqrt[3]{y'}.$$

El jacobiano de la transformación (1) es igual a $9x^2y^2$ y por consiguiente igual a cero, para x = 0 ó y = 0.

Observación 2. Aceptemos que las funciones

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y)$$

sean continuas en conjunto con sus derivadas parciales de primer orden, en un dominio conexo (ver Pág.167). Si se supone que la transformación, definida por estas funciones, es biunívoca puede demostrarse que el jacociano es $\geqslant 0$ o donde quiera $\leqslant 0$.

Omitiremos la demostración.

Ejemplos.

3. Jacobiano de la transformación lineal

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2$$

es igual a $a_1b_2 - a_2b_1$. Si éste fuera diferente de cero, entonces, como se sabe de la teoría de las ecuaciones lineales, el sistema podría resolverse con respecto á x y á y obteniéndose ecuaciones de forma análoga. Tenemos, pues, una transformación biunívoca y continua de todo el plano OXY sobre todo el plano O'X'Y.' Si el jacobiano (que en este ejemplo no contiene a las variables x, y) es igual a cero, entonces, como se sabe de la Geometría Analítica, la imagen del plano OXY será una recta o un punto. En este caso la transformación es continua pero no es biunívoca.

4. La introducción de coordenadas polares

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

puede considerarse como la transformación del plano de las variables r, sobre el plano OXY. El jacobiano de esta transformación es igual, como se sabe á r (ver Pág.370). Para r = 0 y φ arbitrario obtenemos x = 0, y = 0, esto es, todos los puntos de la recta r = O convergen al origen de coordenadas del plano OXY. En la vecindad del punto (r, φ) en la cual $r \neq 0$, la transformación es biunívoca y la transformación inversa se da por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

donde la elección del signo de las raíces así como los valores del ángulo se determinan univalentemente de acuerdo con la continuidad de la transformación.

Como los puntos (r, φ) y $(r, \varphi + 2n\pi)$, donde n es un número entero arbitrario, corresponden a uno y al mismo punto del plano OXY, entonces cada uno de los puntos de este plano es la imagen de un conjunto infinito de puntos **del plano** (r, φ).

En las aplicaciones es frecuente que se tome $r \geqslant 0$, y un ángulo φ condi-

cionado $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Se comprueba fácilmente que la imagen, biunívoca y continua, del dominio interior de un rectángulo, definido por las desigualdades

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

es el dominio obtenido de la interioridad del círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ eliminando de ella el segmento del eje $0 \leqslant x \leqslant a, \; y = 0$.

5. La transformación

$$x' = x + y, \quad y' = xy$$

es continua pero no biúnívoca en todo el plano OXY. Efectivamente, a los puntos (x, y) y (y, x) simétricamente dispuestos con respecto a la recta $y = x$, diferentes en general, corresponde uno y el mismo punto (x', y'). Su determínante funcional es igual $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$, por consiguiente igual a cero para la recta $y = x$. Para encontrar la imagen del plano OXY, a partir de esta transformación observemos que para el punto (x', y') dado, los números x, son las raíces de la ecuación cuadrática.

$$z^2 - x'z + y' = 0.$$

Como es sabido esta ecuación tiene raíces reales, cuando y solamente cuando $x'^2 - 4y' \geqslant 0$. . Por consiguiente, la imagen del plano OXY es el conjunto de puntos (x', y'), distribuídos bajo la parábola $y' = \frac{x'^2}{4}$ ó en la propia parábola.

Según el teorema de la página 369 , nuestra transformación es biunívoca en cierta vecindad de cada punto (x_0, y_0), fuera de la recta $y = x$. Efectivamente resolviendo las ecuaciones con respecto á x y y que definen la transformación, encontramos

$$x = \frac{x' + \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}, \quad y = \frac{x' - \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}$$

ó

$$x = \frac{x' - \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}, \quad y = \frac{x' + \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}.$$

Para cierta vecindad del punto x_0, y_0 tienen lugar la primera o la segunda de estas posibilidades, dependiendo de que se tenga $x_0 > y_0$ o bien, $x_0 < y_0$.

Si, por el contrario $x_0 = y_0$, la transformación no será biunívoca en ninguna vecindad del punto (x_0, y_0), ya que en toda vecindad puede encontrarse un par de puntos simétricamente dispuestos con respecto a la recta $y = x$, cuyas imágenes son uno y el mismo punto del plano O′X′Y′.

Asimismo, si nuestra transformación es biunívoca en un cierto dominio conexo ω, entonces este dominio no puede contener ningún punto de la recta $y = x$ y por consiguiente, está alojado completamente arriba o abajo de esta recta. De esto se deduce que el jacobiano tiene un signo constante en el dominio (ver la observación 2, Pág.372).

PROBLEMAS

1. Demostrar que para la transformación

$$x'=x^2-y^2, \quad y'=2xy$$

la imagen del plano OXY es todo el plano O'X'Y'. La transformación no es biunívoca en ninguna vecindad del punto (0, 0).

2. Demostrar que para la transformación

$$x'=x, \quad y'=x^2+y^2$$

la imagen del plano OXY será el conjunto de puntos del plano O'X'Y' distribuídos arriba de la parábola $y'=x'^2$ y en la misma. La transformación no es biunívoca en las vecindades de los puntos del eje OX.

4. Cambio de Variables en Integrales Dobles. Sean ω y ω' dos dominios regulares, delimitados respectivamente por las curvas simples cerradas C y C'. Admitamos que las funciones

$$x'=f(x, y), \quad y'=\varphi(x, y)$$

son definidas y continuas, así como sus primeras derivadas parciales, en cierto dominio cerrado D que contiene en su interior parte del dominio ω. Sea P (x', y') una función continua en ω'. Si deseamos introducir las nuevas variables x, y, ligadas a las variables x', y' por las ecuaciones (α), en la integral

$$\iint_{\omega'} P(x', y')\,dx'dy'$$

se emplea la fórmula

$$\iint_{\omega'} P(x', y')\,dx'dy' = = \varepsilon \iint_{\omega} P[f(x, y), \quad \varphi(x, y)] \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}\,dx\,dy,$$

donde

$$\varepsilon=\pm 1.$$

La fórmula (1) es válida bajo las siguientes condiciones:

1. La función P(x', y'), definida y continua en cierto dominio cerrado D' que contiene no solamente al dominio ω', sino a toda imagen del dominio ω después de la transformación (α).

2. Las funciones f y φ transforman biunívocamente la curva C sobre la curva C'.

3. Si un punto recorre la curva C hacia la izquierda, entonces el punto correspondiente de la curva C' la recorrerá, según la condición 2, hacia la izquierda o hacia la derecha. En el primer caso tendremos $\varepsilon=1$, y en el segundo $\varepsilon=-1$. Por tanto, ε no depende de la función P(x', y') sino solamente de la transformación definida por las funciones f y φ.

Observación. De la condición 1 se desprende la existencia de la integral en el miembro derecho de la igualdad (1). En cuanto a la transformación biunívoca en el interior del dominio, limitado por la curva C, no es posible decir nada.

Haremos la demostración mencionada en la suposición que se satisfacen cier-

tas condiciones adicionales, a saber supondremos que:

a) la curva C tiene una representación normal que satisface las condiciones de la Pág. 353

b) El dominio ω (correspondientemente, ω') puede dividirse en un número finito de dominios normales con respecto a cada uno de los ejes OX, OY, (correspondientemente, $O'X'$, $O'Y'$).

c) Las funciones $f(x, y)$ y $\varphi(x, y)$ tienen derivadas parciales de segundo orden, continuas en $\bar{\omega}$.

d) Existe una función F(x', y') definida en D' que satisface la **relación**

$$F'_{y'}(x', y') = P(x', y') \tag{1}$$

en el dominio ω'.

Según el teorema de Green, tenemos:

$$\int_{C'} F(x', y')\,dx' = -\iint_{\omega'} \frac{\partial F}{\partial y'}\,dx'dy' = -\iint_{\omega'} P(x', y')\,dx'dy'. \tag{2}$$

La integral se toma en dirección izquierda a lo largo de la curva C'.

Sean las funciones

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t) \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

una representación normal de la curva C **según** la dirección izquierda. Entonces, en virtud de la condición 2, **las funciones**

$$x' = f[\alpha(t), \beta(t)] = u(t), \quad y' = \varphi[\alpha(t), \beta(t)] = v(t) \qquad (t_0 \leq t \leq t_1) \tag{3}$$

serán una representación normal de la curva C'.

Como las funciones f, φ tienen derivadas parciales continuas y de acuerdo con lo supuesto, la curva C **satisface** la condición (a), puede considerarse que el intervalo $[t_0, t_1]$ puede **ser** dividido en un número finito de intervalos, en los que las funciones $\alpha(t), \beta(t)$ tienen derivadas continuas (en los extremos de los intervalos las derivadas son **unilaterales**), y por **consiguiente**, las funciones $u(t)$ y $v(t)$ también tienen derivadas continuas en estos intervalos (en los extremos, unilaterales). En virtud de 3 tenemos:

$$\int_{C'} F(x', y')\,dx' = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} F[u(t), v(t)]\,u'(t)\,dt, \tag{4}$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ dependiendo de que la curva C se recorre en la dirección izquierda y el recorrido correspondiente de la curva C' se haga también en la dirección izquierda o en la contraria. (ver Pág. 354)

De las relaciones (3) obtenemos (excepto para un número finito de puntos):

$$u'(t)=f'_x[\alpha(t),\ \beta(t)]\alpha'(t)+f'_y[\alpha(t),\ \beta(t)]\beta'(t).$$

De aquí y de (4) se deduce

$$\int_{C'} F(x',\ y')\,dx'=\varepsilon\int_{t_0}^{t_1} F[u(t),\ v(t)]f'_x[\alpha(t),\ \beta(t)]\alpha'(t)\,dt+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1} F[u(t),\ v(t)]f'_y[\alpha(t),\ \beta(t)]\beta'(t)\,dt.$$

Fácilmente se advierte que las integrales en el miembro derecho de esta igualdad son iguales, respectivamente, a las integrales

$$\int_C F[f(x,\ y),\ \varphi(x\ y)]f'_x(x,\ y)\,dx,\quad \int_C F[f(x,\ y),\ \varphi(x,\ y)]f'_y(x,\ y)\,dy,$$

y ambas integrales se toman en la dirección izquierda. Omitiendo, para simplificar, las variables x, y, puede por consiguiente, escribirse:

$$\int_{C'} F(x',\ y')\,dx'=\varepsilon\int_C F(f,\ \varphi)f'_x\,dx+\varepsilon\int_C F(f,\ \varphi)f'_y\,dy. \tag{5}$$

Transformemos el miembro derecho de la igualdad (5) mediante la fórmula de Green. Obtenemos:

$$\int_{C'} F(x',y')\,dx'=\varepsilon\iint_{\omega}\left\{-\frac{\partial[F(f,\ \varphi)f'_x]}{\partial y}+\frac{\partial[F(f,\ \varphi)f'_y]}{\partial x}\right\}dx\,dy.$$

Pero

$$\frac{\partial[F(f,\ \varphi)f'_x]}{\partial y}=[F'_{x'}(f,\ \varphi)f'_y+F'_{y'}(f,\ \varphi)\varphi'_y]f'_x+F(f,\ \varphi)f''_{xy},$$

$$\frac{\partial[F(f,\ \varphi)f'_y]}{\partial x}=[F'_{x'}(f,\ \varphi)f'_x+F'_{y'}(f,\ \varphi)\varphi'_x]f'_y+F(f,\ \varphi)f''_{xy}.$$

Por tanto

$$\int_{C'} F(x',y')\,dx'=-\varepsilon\iint_{\omega} F'_{y'}(f,\ \varphi)\frac{D(f,\ \varphi)}{D(x,\ y)}\,dx\,dy.$$

De donde, en virtud de (1) y (2), obtenemos:

$$\iint_{\omega'} P(x',\ y')\,dx'dy'=\varepsilon\iint_{\omega} P[f(x,\ y),\ \varphi(x,\ y)]\frac{D(f,\ \varphi)}{D(x,\ y)}\,dx\,dy.$$

Observación. Si la frontera del dominio ω' consiste de varias curvas cerradas C'_1, C'_2, ..., C'_n, entonces el teorema anterior continúa siendo válido solamente en el caso en que la forntera del dominio ω consista del mismo número de curvas cerradas C_1, C_2, ..., C_n, las que mediante las funciones f, φ se transformen biunívocamente en las curvas C'_1, C'_2, ... Procede suponer aún que si el punto describe las curvas C_1, C_2, ... en dirección izquierda, entonces el punto correspondiente describe las curvas $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ siempre en dirección izquierda o siempre en dirección derecha.

La demostración se conduce análogamente a la anterior, si se hace uso del

teorema general de Green. (Pág.359)

Observación 2. Aceptemos que el signo jacobiano $\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}$ no cambia en el dominio ω. Según la fórmula (1)

$$\iint_{\omega'} P(x',y')\,dx'dy' = \iint_{\omega} P(f,\varphi)\left[\varepsilon \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\right] dx\,dy. \quad (6)$$

Aquí $\varepsilon = \pm 1$ depende únicamente de f y de φ, pero no de P. Haciendo P(x', y') = 1, obtenemos:

$$\iint_{\omega'} dx'dy' = \iint_{\omega} \left[\varepsilon \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\right] dx\,dy.$$

Por cuanto el miembro izquierdo de esta igualdad es positivo, la función $\varepsilon \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}$ debe ser no-negativa ya que según los supuesto el jacobiano no cambia de signo, y como $\varepsilon = \pm 1$, entonces

$$\varepsilon \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} = \left|\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\right|.$$

Por consiguiente, en este caso según la fórmula (6) encontramos:

$$\iint_{\omega'} P(x',y')\,dx'dy' = \iint_{\omega} P(f,\varphi)\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\right| dx\,dy. \quad (II)$$

Observación 3. Puede demostrarse que la fórmula (II) es válida siempre y cuando se satisfagan las condiciones siguientes:

1). Los dominios ω y ω' sean regulares;

2). Las funciones $f(x,y)$ y $\varphi(x,y)$ transformen biunívocamente la parte inter del dominio ω sobre toda la parte interior del dominio ω'.

En este caso no es obligatorio suponer que la transformación sea biunívoca sobre la frontera.

Ejemplos.

1. Calcular la integral $\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$ sobre el sector circular ω, limitado por el eje OX la recta $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha\ (0 < \alpha < 2\pi)$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Hagamos

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Estas ecuaciones transforman biunívocamente la interioridad del rectángulo $D(0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \alpha)$ del plano (r,φ) en la interioridad del sector ω, y el jacobiano

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

tiene un signo constate.

Por consiguiente

$$\iint_{\omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint_{D}(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^1 r^3dr=\frac{\alpha}{4}.$$

Para el cálculo de la integral sobre todo el círculo unitario no podríamos utilizar la transformación anterior ya que ella no es mutuamente unívoca en ninguna vecindad del punto r = 0. Sin embargo puesto que el resultado obtenido es correcto para todo $\alpha<2\pi$, tendremos que al pasar al límite, cuando $\alpha\rightarrow 2\pi$, la integral sobre todo el círculo toma el valor $\frac{\pi}{2}$.

Como este razonamiento es válido para cualquier función continua la integración sobre todo un círculo unitario puede llevarse a coordenadas polares, aunque aquí las condiciones de nuestro teorema no se cumplen.

Esto, por otra parte, se sigue también de la observación 3 y de la propiedad de nuestra transformación (ver el ejemplo 4, Pág.372).

Calcular el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Como el elipsoide es simétrico con respecto al plano OXY, entonces

$$V=2\iint_{\omega}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

y el dominio ω de integración será la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hagamos x = au, y = bv. Se comprueba fácilmente que estas fórmulas determinan una reflexión mutuamente unívoca del círculo unitario K del plano OUV en la elipse ω. Puesto que

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=ab>0,$$

obtendremos:

$$\iint_{\omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\iint_{K}\sqrt{1-u^2-v^2}\,ab\,du\,dv.$$

Introduciendo las coordenadas polares $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ (ver el ejemplo anterior) encontramos

$$\iint_{K}\sqrt{1-u^2-v^2}\,du\,dv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2}{3}\pi.$$

Finalmente

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Representemos por $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ dos funciones continuas y con derivadas parciales, continuas también, en la vecindad del punto (x_0, y_0). Supongamos

también que su jacobiano

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}$$

es diferente de cero en este punto.

La transformación definida por las ecuaciones

$$x'=f(x,y),\quad y'=\varphi(x,y),$$

es mutuamente biunívoca en la vecindad de cierto punto (x_0, y_0).

Así, si se contruye un círculo k_r de radio suficientemente pequeño con centro en el punto (x_0, y_0), la imagen de este círculo será cierta curva cerrada K_r así como el dominio que se encuentra en el interior de esta curva. El área limitada por esta curva es igual a la integral

$$\iint_{K'_r} dx'dy' = \varepsilon\iint_{K_r}\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}dx\,dy.$$

Representando por m_r y M_r los valores mínimo y máximo, respectivamente, del jacobiano, en el círculo K_r obtenemos, según el teorema de la Pág. 335

$$m_r|K_r| \leqslant \iint_{K_r}\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}dx\,dy \leqslant M_r|K_r|,$$

es decir,

$$m_r \leqslant \frac{1}{|K_r|}\iint_{K_r}\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}dx\,dy \leqslant M_r.$$

Si el radio r tiende a cero, entonces los número m_r y M_r, en virtud de la continuidad del jacobiano, tenderán al valor de éste en el punto (x_0, y_0).

Por lo que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|K_r|}\iint_{K_r}\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}dx\,dy = \left.\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Mulriplicando ambos miembros por ε, obtenemos:

$$\lim_{r\to 0}\frac{|K'_r|}{|K_r|} = \varepsilon\left.\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Vemos, así, que la magnitud absoluta del jacobiano es igual al límite de la relación entre K'_r y K_r y el jacobiano será positivo o negativo de acuerdo con que se conserve o no la dirección de circulación. Tenemos aquí cierta analogía con las propiedades conocidas de la derivada de una función de una variable.

PROBLEMAS

1. Por medio de los ejemplos anteriores de cambios de variables, calcular:

a) El volumen de la porción del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

alojada en el primer octante entre los planos x = 0, y = 0, z = 0 y el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

$$V=\frac{1}{24}\pi abc\,(5\sqrt{2}-4).$$

b) El volumen del cuerpo determinado por la intersección de la esfera

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

con el cilindro circular

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (a>r).$$

$$V=\frac{4}{3}\pi\,[r^3-(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}].$$

c) Las coordenadas del centro de gravedad (ver Pág. 343 , problema 6) de un cuarto de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

alojado en el primer cuadrante:

$$\xi=\frac{4a}{3\pi}, \quad \eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

2. Demostrar mediante un cambio de variables, que la transformación

$$x'=\sqrt{y}, \quad y'=-2x\sqrt{y},$$

es biunívoca para $y>0$, y que posee la propiedad de que la imagen de cualquier dominio cerrado del plano OXY (alojado sobre el eje OX) es un dominio cerrado con la misma área.

CAPITULO XXIII

INTEGRAL MULTIPLE.

1. Integral Triple. Sea D un conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio $OXYZ$ que satisfacen las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant a', \quad b \leqslant y \leqslant b', \quad c \leqslant z \leqslant c'.$$

Evidentemente D es un paralelepípedo recto de volumen

$$\tau = (a' - a)(b' - b)(c' - c)$$

y

$$l = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}.$$

es su diagonal.

Dividamos a D en un número finito de paralelepípedos rectos de volúmenes $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ +). Llamaremos cortadura δ al conjunto de estos paralelepípedos rectos. Representaremos con $|\delta|$ a la mayor de las diagonales de los paralelepípedos.

Se dirá que la secuencia de cortaduras es normal si

$$\lim_{n \to \infty} |\delta_n| = 0.$$

Admitamos que en el paralelepípedo recto D, $f(x, y, z)$ es una función definida y acotada. Formemos una cortadura δ arbitraria y elijamos también arbitrariamente en cada paralelepípedo de los que constituyen la cortadura δ un punto. Representemos las coordinadas de los puntos escogidos por $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \ldots$ y formemos la suma:

$$A = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, \Delta\tau_1 + f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, \Delta\tau_2 + \ldots$$

Si para cada secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$ la correspondiente secuencia de la sumas $\{A_n\}$ tiene límite, se dice que la función $f(x, y, z)$ es integrable en D. Puede demostrarse (como en la doble integral) que en este caso las secuencias $\{A_n\}$ tienden a un límite común al que llamamos integral triple de la función $f(x, y, z)$ en el paralelepípedo recto C. Se representa mediante el símbolo

$$\iiint_D f(x, y, z)\, d\tau \quad \text{или} \quad \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

+) En lo que sigue tanto los paralelepípedos como los dominios se representarán también por $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ (Nota de la Red).

2. Integral Múltiple. Sea D el conjunto de puntos (x, y, z, t) del espacio de cuatro dimensiones, que satisfacen las desigualdades:

$$a \leqslant x \leqslant a', \quad b \leqslant y \leqslant b', \quad c \leqslant z \leqslant b', \quad d \leqslant t \leqslant d'.$$

El conjunto D se llama intervalo del espacio tetradimensional (Pag.202).

Como medida de este intervalo (al que también llamamos valumen) se tiene el número

$$\tau = (a' - a)(b' - b)(c' - c)(d' - d).$$

Se llama diagonal del intervalo al número

$$l = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2 + (d' - d)^2}.$$

Dividiendo el intervalo D en un número finito de intervalos de medida $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ obtenemos la cortadura δ. Representamos con $|\delta|$ a la mayor de las diagonales de los intervalos que entran en la cortadura δ. Se dice que la secuencia de las cortaduras $\{\delta_n\}$ es normal, si

$$\lim_{n \to \infty} |\delta_n| = 0.$$

Sea que la función $f(x, y, z, t)$ es definida y acotada en el intervalo D. Tomemos, arbitrariamente, en cada intervalo $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ un punto cuyas coordinadas serán respectivamente $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t_2), \ldots$ y formemos la suma:

$$A = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t_1)\Delta\tau_1 + f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t_2)\Delta\tau_2 + \ldots$$

Si para cada secuencia normal de cortaduras $\{\delta_n\}$, la correspondiente secuencia de sumas $\{A_n\}$ tiene límite, entonces se dice que la función $f(x, y, z, t)$ es integrable en el intervalo D. El límite común de las secuencias $\{A_n\}$ se llama integral cuádruple de la función $f(x, y, z, t)$ en el intervalo D. Se representa mediante el símbolo

$$\iiiint_D f(x, y, z, t)\, d\tau \quad \text{o} \quad \iiiint_D f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Se define similarmente la integral múltiple en un espacio de un número cualquiera de dimensiones.

3. Condiciones de Integrabilidad. Los teoremas 1,2,3 y 4 (Pár. 2, Pag.327) siguen siendo válidos para las integrales triples y múltiples. En los teoremas 1, 2, 3, en calidad de dominio D, debe tomarse un paralelpípedo recto como intervalo. Las demostraciones de estos

teoremas son análogas. En el teorema 4 se hace la modificación siguiente: en el caso de la integral triple suponemos que los puntos de discontinuidad de la función subintegral están alojados en un número finito de superficies que son las imágenes geométricas de la función continua $z=f(x, y)$ o de $x=\varphi(y, z)$, o $y=\psi(x, z)$. En el caso de la integral cuádruple supondremos que los puntos de discontinuidad están sobre un número finito de imágenes múltiples, que son imágenes geométricas de funciones continuas tales como $t=f(x, y, z)$, o $x=\varphi(y, z, t)$ etc.

Variantes análogas se introducen para el caso de mayor número de dimensiones.

4. La integral múltiple como reiteración.

Teorema. Si la función $f(x, y, z)$ es continua en el paralelepípedo recto $D(a\leq x\leq a', b\leq y\leq b', c\leq z\leq c')$ entonces

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,d\tau=\int_a^{a'}\left[\int_b^{b'}\left\{\int_c^{c'} f(x, y, z)\,dz\right\}dy\right]dx.$$

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema del Pár. 3, Pág. 328.

Un teorema análogo tiene lugar para las integrales múltiples.

Observación. Puede demostrarse un teorema más general. Aceptemos que la función $f(x, y, z)$ es integrable en D y que para todo par de valores x, y la función $f(x, y, z)$, considerada como función de una sola variable z es integrable. Bajo tales condiciones puede afirmarse que:

1) $F(x, y)=\int_c^{c'} f(x, y, z)\,dz$ es una función integrable en el rectángulo $D'(a\leq x\leq a', b\leq y\leq b')$;

2) $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,d\tau=\iint\limits_{D'}\left\{\int_c^{c'} f(x, y, z)\,dz\right\}d\sigma.$

Ejemplo. Calcular la integral $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\,d\tau$ sobre el paralelepípedo recto D determinado por las desigualdades

$$0\leq x\leq a,\quad 0\leq y\leq b,\ 0\leq z\leq c.$$

obtenemos:

$$\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\,d\tau=\int_0^a\left[\int_0^b\left\{\int_0^c (x^2+y^2+z^2)\,dz\right\}dy\right]dx=$$

$$=\int_0^a\left[\int_0^b\left(cx^2+cy^2+\frac{c^3}{3}\right)dy\right]dx=$$

$$=\int_0^a\left[bcx^2+\frac{b^2}{3}c+b\frac{c^2}{3}\right]dx=$$

$$=\frac{a^3bc}{3}+\frac{ab^3c}{3}+\frac{abc^3}{3}=\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

5. Integral Múltiple sobre un Dominio. Sea ω un dominio acotado y cerrado en el espacio tridimensional, (ver Pág. 202).

Admitamos que la función $f(x, y, z)$ es definida y acotada en el dominio ω Sea D un paralelepípedo recto cualquiera.

$$(a\leqslant x\leqslant a', \quad b\leqslant y\leqslant b' \quad c\leqslant z\leqslant c'),$$

que contiene al dominio ω Definamos en D una nueva función $F(x, y, z)$, haciendo

$$F(x, y, z)=\begin{cases} f(x, y, z) \\ 0 \end{cases}$$

Diremos que la función $f(x, y, z)$ es integrable en ω si $F(x, y, z)$ es integrable en D. Llamaremos al valor de la integral $\iiint_D F(x, y, z)\,d\tau$ integral triple de la función $f(x, y, z)$ en el dominio ω. La triple integral sobre el dominio ω se representará, como antes, mediante el símbolo

$$\iiint_\omega f(x, y, z)\,d\tau \quad \text{o} \quad \iiint_\omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Así, pues, según la definición arriba mencionada

$$\iiint_\omega f(x, y, z)\,d\tau=\iiint_D F(x, y, z)\,d\tau.$$

Como fácilmente se comprueba, para la triple integral tiene lugar una observación análoga a la de la Pág. 333.

El dominio cerrado ω es regular si su frontera consiste en un número finito de superficies susceptibles de representarse en una de las siguientes formas

$$z=f(x, y),\ y=\varphi(x, z),\ x=\phi(y, z).$$

El lector comprobará fácilmente, que los teoremas 1 y 2 (Pág. 333) son válidos también para las integrales triples (con los cambios correspondientes).

El volumen de un dominio regular cerrado ω se determina por la fórmula

$$|\omega|=\iiint_\omega d\sigma.$$

Tal definición y teoremas tienen lugar para integrales múltiples cualesquiera.

Fácilmente podrá el lector formular los teoremas 1, 2, 3 Par. 5 (Pág. 334) para las integrales múltiples. Las demostraciones son análogas.

Como valor medio de la función $f(x, y, z)$ en el dominio ω obtenemos la cantidad

$$\frac{1}{|\omega|}\iiint_{\omega} f(x, y, z)\, d\tau.$$

<u>6. La Integral Múltiple como Reiteración en un Dominio.</u> Sea ω_1 un dominio retular en el plano OXY y ω un dominio regular en el espacio de tres dimensiones, definidos de la siguiente manera: El dominio ω está constituido por todos los puntos (x, y, z) para los cuales el punto (x, y) perteneciente a ω_1 y z satisface las desigualdades

$$\varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y),$$

donde $\varphi_1(x, y)$ y $\varphi_2(x, y)$ son funciones continuas definidas en ω_1. A tal dominio lo llamaremos normal con relación al plano OXY. El dominio ω está delimitado por las superficies $z=\varphi_1(x,y)$, $z=\varphi_2(x,y)$ y la superficie lateral del cilindro de base ω_1, cuyas generatrices son paralelas al eje OZ. Sea D un paralelepípedo recto cualquiera determinado por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, $c \leqslant z \leqslant c'$ que encierra al dominio ω. Si la función $f(x, y, z)$ es continua en ω, entonces, como sabemos:

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z)\, d\tau = \iiint_{D} F(x, y, z)\, d\tau,$$

donde $F(x, y, z) = f(x, y, z)$ en ω y $F(x, y, z) = 0$ en los restantes puntos del paralelepípedo D.

La función $F(x, y, z)$, considerada como función de una sola variable z, tiene no más de dos puntos de discontinuidad: estos pueden ser solamente los puntos en los que la recta que saliendo del punto (x, y), paralelamente a OZ, intersecta la frontera del dominio ω. Por consiguiente, para todo punto (x, y) existe la integral

$$\int_{c}^{c'} F(x, y, z)\, dz = W(x, y).$$

De donde, en virtud de la observación de la Pág. 383 se desprende que

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z)\, d\tau = \iiint_{D} F(x, y, z)\, d\tau = \iint_{D'} \left\{ \int_{c}^{c'} F(x, y, z)\, dz \right\} d\sigma, \quad (1)$$

donde D' representa el rectángulo definido por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant a' \qquad b \leqslant y \leqslant b'.$$

Pero como fácilmente se advierte, para x, y fijos, tenemos

$$W(x, y) = \int_{c}^{c'} F(x, y, z)\,dz = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} F(x, y, z)\,dz =$$
$$= \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz, \qquad (2)$$

cuando (x, y) pertenecen a ω_1, y

$$W(x, y) = \int_{c}^{c'} F(x, y, z)\,dz = 0$$

en los restantes puntos del rectángulo D'.

Por consiguiente.

$$\iint_{D'} W(x, y)\,d\sigma = \iint_{\omega_1} W(x, y)\,d\sigma.$$

Así pues, en virtud de (1) y (2)

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z)\,dt = \iint_{\omega_1} \left\{ \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right\} d\sigma.$$

Fórmulas análogas se obtienen para dominios normales en relación con los planos OYZ y OXZ.

Ejemplos.

1. Calcular la integral $\iiint_{\omega} (2x + 3y - z)\,dx\,dy\,dz$ en el prisma triangular, de caras $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Tenemos $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = a$. El dominio ω_1, en el plano OXY será el triángulo de lados

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = b.$$

Así pues,

$$\iiint_{\omega} (2x + 3y - z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\omega_1} \left\{ \int_{0}^{a} (2x + 3y - z)\,dz \right\} d\sigma.$$

Como

$$\int_{0}^{a} (2x + 3y - z)\,dz = (2x + 3y)\,a - \frac{a^2}{2},$$

entonces, finalmente, para nuestra integral obtenemos:

$$\iint_{\omega_1} \left[(2x + 3y)\,a - \frac{a^2}{2} \right] d\sigma = \int_{0}^{b} dx \int_{0}^{b-x} \left[(2x + 3y)\,a - \frac{a^2}{2} \right] dy =$$
$$= \frac{5}{6}\,ab^3 - \frac{1}{4}\,a^2 b^2.$$

2. Calcular el volumen de un dominio normal con respecto al plano - OXY.

Conservando la notación anterior, obtenemos:

$$V=\iiint_{\omega} dx\,dy\,dz=\iint_{\omega_1}\left\{\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz\right\} d\sigma,$$

esto es

$$V=\iint_{\omega_1}[\varphi_2(x, y)-\varphi_1(x, y)]\,d\sigma$$

(ver Pag.340 Ejemplo 4)

PROBLEMAS

1. Calcular la triple integral

$$\iiint_D (1-x)^2\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz$$

en el paralelepípedo recto D, limitado por los planos $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$.

Respuesta. $\frac{4\pi}{3}$.

2. Las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo homogéneo son los valores medios de las funciones x, y, z, es decir

$$\xi=\frac{1}{|\omega|}\iiint_{\omega} x\,d\tau, \quad \eta=\frac{1}{|\omega|}\iiint_{\omega} y\,d\tau, \quad \zeta=\frac{1}{|\omega|}\iiint_{\omega} z\,d\tau.$$

Determinar el centro de gravedad;

a) de la octava parte del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

alojada en el primer octante.

b) Del cono circular de radio r y altura w.

Respuesta. a) $\xi=\frac{3}{8}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$, $\zeta=\frac{3}{8}c$; b) sobre la altura del cono a una distancia $\frac{1}{4}w$ desde la base.

3. Calcular el triple integral $\iiint_{\omega} x^2\sin y\,d\tau$ en el dominio ω, normal con relación al plano OYZ, comprendido entre este plano y las superficies

$$x=1+\cos y \quad (0\leqslant y\leqslant\pi, \quad 0\leqslant z\leqslant 2\pi).$$

Respuesta: $\frac{8\pi}{3}$.

ESTA OBRA HA SIDO EDITADA POR UNIÓN TIPOGRÁFICA
EDITORIAL HISPANO AMERICANA, DE MÉXICO, D. F.,
AV. UNIVERSIDAD, 767. FUE IMPRESA EN CEN-
TRAL DE EDITORIALES, S. A., DE MÉXICO,
VICENTE BERISTÁIN, 70, Y SE TERMINÓ
EL DÍA 21 DE NOVIEMBRE DE 1967.
LA EDICIÓN CONSTA DE 1,500
EJEMPLARES.

PRECIO DE VENTA EN MÉXICO: $